Morphismes continues de $\mathbb{S}^1$ dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$

Achille Méthivier

Théorème 1. *Les morphismes continues de $\mathbb{S}^1$ dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ sont exactement de la forme*

$$\mathrm{e}^{it} \mapsto Q \begin{pmatrix} R_{tk_1} & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & R_{tk_r} & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix} Q^{-1},$$

avec $Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, $k_1, \dots, k_r \in \mathbb{Z}$ et $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$.

Lemme 2. *Les morphismes continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ sont les $t \mapsto \mathrm{e}^{tA}$ avec $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.*

Démonstration. Soit $\varphi : \mathbb{R} \mapsto \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ un morphismes continue. Supposons momentanément que φ soit dérivable. En dérivant par rapport à s la relation $\varphi(s+t) = \varphi(s)\varphi(t)$ et en prenant $s = 0$, on obtient l'équation différentielle suivante

$$\varphi'(t) = \varphi'(0)\varphi(t).$$

Comme $\varphi(0) = I_n$, on a $\varphi(t) = \mathrm{e}^{t\varphi'(0)}$ et il suffit de prendre $A = \varphi'(0)$.
Il suffit donc de justifier la dérivabilité de φ pour avoir le résultat annoncé. D'après la relation

$$\frac{\varphi(t+h) - \varphi(t)}{h} = \varphi(t)\frac{\varphi(h) - I_n}{h},$$

,comme $\varphi(t)$ inversible, il suffit de justifier la dérivabilité en 0. Posons pour cela,

$$F(t) = \int_0^t \varphi(s)\,\mathrm{d}s.$$

Alors F est C^1 et on a

$$F(h) = \int_0^h \varphi(s)\,\mathrm{d}s = \varphi(h)\int_{-h}^0 \varphi(s)\,\mathrm{d}s = \varphi(h)\big(-F(-h)\big),$$

or $F(-h)/h \xrightarrow[h\to 0]{} -I_n$ et comme $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est ouvert, pour $h \neq 0$ assez petit, $-F(-h)$ est inversible. Donc, pour $h \neq 0$ assez petit,

$$\varphi(h) = F(h)\big(-F(h)\big)^{-1},$$

et comme l'application $u \in GL_n(\mathbb{R}) \mapsto u^{-1} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est C^∞, on en déduit que φ est dérivable en 0. □

Démonstration du théorème. Tout d'abord, une application de la forme donnée par le théorème est bien définie car R_θ ne dépend que de la classe de θ modulo 2π. De plus, c'est un morphisme de groupes car $R_{(t+s)k} = R_{tk}R_{sk}$. Enfin, pour $z_0 \in \mathbb{S}^1$, on dispose de $t_0 \in \mathbb{R}$ tel que $\mathrm{e}^{it_0} = z_0$. L'application $f : t \mapsto \mathrm{e}^{it}$ réalise un homéomorphisme d'un intervalle fermé I, centré en t_0 et de longueur strictement inférieur à 2π, sur son image. Quand $z \to z_0$, on a bien $R_{tk} = R_{f^{-1}(z)k} \to R_{f^{-1}(z_0)k} = R_{t_0k}$. La fonction est donc continue en z_0 donc continue sur $\mathbb{S}^1$.
Soit maintenant $\varphi : \mathbb{S}^1 \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ un morphisme continue. Posons $\psi(t) = \varphi(\mathrm{e}^{it})$. Alors $\psi : \mathbb{R} \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est un morphisme de groupes continue. D'après le lemme 2, on dispose de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $\psi(t) = \mathrm{e}^{tA}$. Par construction, ψ est 2π-périodique, donc pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\mathrm{e}^{tA} = \mathrm{e}^{2\pi A + tA} = \mathrm{e}^{2\pi A}\,\mathrm{e}^{tA},$$

puisque A commute avec elle même. Donc $\mathrm{e}^{2\pi A} = I_n$ et utilisons cette relation pour caractériser A. Comme les valeur propres de $\mathrm{e}^{2\pi A}$ sont les $\mathrm{e}^{2\pi\lambda} = 1$ avec λ valeur propre de A, on en déduit que $\lambda \in i\mathbb{Z}$. Montrons maintenant que A est diagonalisable. La décomposition de Dunford, dans $\mathbb{C}$, donne D diagonalisable et N nilpotente telles que $A = D + N$ et $DN = ND$. On a alors, $\mathrm{e}^{2\pi A} = \mathrm{e}^{2\pi D}\,\mathrm{e}^{2\pi N}$ et comme $e^{2\pi D}$ diagonalisable avec même valeurs propre que $\mathrm{e}^{2\pi A}$ (car D et A ont les mêmes valeurs propres), c'est-à-dire 1, on a $\mathrm{e}^{2\pi D} = I_n$. De même, $\mathrm{e}^{2\pi N} = I_n$ et en fait $N = 0$. Supposons par l'absurde que $N \neq 0$, en particulier $\ker(N) \neq \ker(N^2)$. Soit $X \in \ker(N^2) \setminus \ker(N)$, donc $X \neq 0$ et $\mathrm{e}^{2\pi N} X = X + 2\pi NX \neq X$, ce qui contredit $\mathrm{e}^{2\pi N} = I_n$. Donc $A = D$ et est diagonalisable. Les valeurs propres non nulles de A sont deux à deux conjuguées. Il existe donc $k_1, \dots, k_r \in \mathbb{Z}$ et $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ tels que

$$A = P\,\mathrm{Diag}(ik_1, -ik_1, \dots, ik_r, -ik_r, 0, \dots, 0)P^{-1}.$$

Donc, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\mathrm{e}^{tA} = P\,\mathrm{Diag}(\mathrm{e}^{itk_1}, \mathrm{e}^{-itk_1}, \dots, \mathrm{e}^{itk_r}, \mathrm{e}^{-itk_r}, 1, \dots, 1)P^{-1}.$$

Comme

$$\begin{pmatrix} \mathrm{e}^{i\theta} & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{-i\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i & 1 \\ 1 & -i \end{pmatrix} R_\theta \begin{pmatrix} -i & 1 \\ 1 & -i \end{pmatrix}^{-1},$$

on dispose de $Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que

$$\mathrm{e}^{tA} = Q \underbrace{\begin{pmatrix} R_{tk_1} & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & R_{tk_r} & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}}_{=B} Q^{-1}.$$

Les matrices B et e^{tA} sont semblables sur $\mathbb{C}$, elles le sont donc aussi sur $\mathbb{R}$. En effet, en écrivant $Q = Q_1 + iQ_2$, avec Q_1, $Q_2 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on obtient $\mathrm{e}^{tA}(Q_1 + iQ_2) = (Q_1 + iQ_2)B$, donc $\mathrm{e}^{tA}Q_1 = Q_1B$ et $\mathrm{e}^{tA}Q_2 = Q_2B$. Le polynôme $P(X) = \det(Q_1 + XQ_2)$ est non nul puisque $P(i) \neq 0$. Il existe donc $x \in \mathbb{R}$ tel que $P(x) \neq 0$ et on $\mathrm{e}^{tA}(Q_1 + xQ_2) = (Q_1 + xQ_2)B$ avec $Q_1 + xQ_2 \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. On obtient bien la forme voulue. $\square$

I Référence

1. Oraux X-ens : algèbre 2, Francinou, Gianella, Nicolas (page 251)