# Le lemme de Morse

Achille Méthivier

**Théorème 1.** *Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $C^3$ définie sur un ouvert $U$ de $\mathbb{R}^n$, contenant l'origine. On suppose que 0 est point critique non dégénéré de $f$, i. e. $\mathrm{d}_0 f = 0$ et que $\mathrm{d}_0^2 f$ est une forme bilinéaire non dégénérée, de signature $(p, n-p)$. Alors, il existe un difféomorphisme $C^1$, $x \mapsto \varphi(x) = (u_1(x), \ldots, u_n(x))$, entre deux voisinages de 0 dans $\mathbb{R}^n$, tel que $\varphi(0) = 0$ et*

$$f(x) - f(0) = \sum_{i=1}^{p} u_i(x)^2 - \sum_{i=p+1}^{n} u_i(x)^2.$$

**Lemme 2.** *On note $E$ l'ensemble des matrices réelles de tailles $n \times n$ et $S$ le sous-espace des matrices symétriques. On fixe $A_0 \in S$, inversible et soit $\varphi : E \to S$ définie par*

$$\varphi(M) = {}^t M A_0 M.$$

*Alors il existe un voisinage $V$ de $A_0$ dans $S$ une application $A \mapsto M$ tels que $\forall A \in V$ $A = {}^t M A_0 M$.*

*Démonstration.* La fonction $\varphi$ est polynomiale en les coefficients de $M$, donc $C^\infty$. Calculons sa différentielle en l'identité. Soit $H \in E$,

$$\begin{aligned}\varphi(I+H) &= {}^t(I+H)A_0(I+H)\\ &= A_0 + A_0 H + {}^t H A_0 + \underbrace{{}^t H A_0 H}_{=o(H)}.\end{aligned}$$

Donc $\mathrm{d}_I\varphi(H) = A_0 H + {}^t H A_0$. Pour $H \in \ker(\mathrm{d}_I\varphi(H))$, on a $A_0 H + {}^t H A_0 = 0$, donc $A_0 H = -{}^t(A_0 H)$. Autrement dit,

$$\ker(\mathrm{d}_I\varphi(H)) = \{H \in E \ : \ A_0 H \text{est antisymétrique}\}.$$

De plus, $\mathrm{d}_I\varphi$ est surjective car pour $A \in S$, $H = \frac{1}{2}A_0^{-1}A$ vérifie bien $\mathrm{d}_I\varphi(H) = A$. Soit

$$F = \{M \in E \ : \ A_0 M \in S\},$$

c'est un supplémentaire de $\ker(\mathrm{d}_I\varphi(H))$ dans $E$ et $I \in F$. Soit $\psi : F \to S$ la fonction définie par $\psi = \varphi_{|F}$, alors $\mathrm{d}_I\psi$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels, on peut donc lui applique le théorème d'inversion locale. Ils existent $U$ voisinage de $I$ dans $F$ (qu'on peut supposer inclus dans l'ensemble des matrices inversibles), et $V = \psi(U)$ voisinage de $A_0$ dans $S$ tels que $\psi$ soit un $C^\infty$ difféomorphisme de $U$ dans $V$. Dans ce cas, pour tout $A \in V$, la matrice $M = \psi^{-1}(A) \in F$ vérifie bien

$$A = {}^t M A_0 M.$$

□

*Démonstration du théorème.* Appliquons la formule de Taylor à l'ordre 2 avec reste intégrale,

$$f(x) - f(0) = {}^t x Q(x) x,$$

où $Q(x)$ est la matrice symétrique définie par

$$Q(x) = \int_0^1 (1-t)\mathrm{d}_{tx}^2 f \,\mathrm{d}t.$$

Comme $Q(0) = \frac{1}{2}\mathrm{d}_0^2 f$ est symétrique et inversible par hypothèse, on peut lui appliquer le lemme précédent. Comme $x \mapsto Q(x)$ est $C^1$, il existe $W$ voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^n$ tel que pour tout $x$ dans $W$ on ait $Q(x) \in V$, où $V$ est défini comme dans le lemme (c'est un voisinage de $Q(0)$ dans $S$). On a donc une unique matrice inversible $M(x)$ telle que

$$Q(x) = {}^t M(x) Q(0) M(x),$$

et $x \mapsto \psi^{-1}(Q(x)) = M(x)$ est $C^1$. On a donc

$$f(x) - f(0) = {}^t y Q(0) y, \quad y = M(x)x.$$

Et comme $Q(0)$ est de signature $(p, n-p)$, il existe $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ tel que

$${}^t A Q(0) A = \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_{n-p} \end{pmatrix}.$$

En effectuant le changement de coordonnés linéaire $y = Au$, on obtient l'expression locale pour $f$ souhaitée. L'application $x \mapsto A^{-1}M(x)x$ est $C^1$ et regardons sa différentielle en 0,

$$\begin{aligned}A^{-1}M(h)h &= A^{-1}\left(M(0) + \mathrm{d}_0 M(h)\right)h\\ &= A^{-1}M(0) + \underbrace{\left(\mathrm{d}_0 M(h)\right)h}_{=o(h)}\end{aligned}$$

Donc sa différentielle en 0 est $A^{-1}M(0)$ qui est une matrice inversible. Par inversion locale, on obtient bien un $C^1$ difféomorphisme local. □

# I Références

1. Petit guide du calcul différentiel, Rouvière (pages 201 et 344)