Théorème de Lie-Kolchin Achille Méthivier

Théorème 1. *Soient $n \geq 1$ et G un groupe connexe et résoluble de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. Alors G est cotrigonalisable. Autrement dit, si B dénote l'ensemble des matrices triangulaires supérieures, il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que $PGP^{-1} \subset B$.*

Lemme 2. *Toute partie commutative de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est cotrigonalisable.*

Démonstration. Raisonnons par récurrence sur n, sachant que le cas $n = 1$ est clair.
Soit $n \leq 2$ et C une partie commutative de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. Si tous les éléments de C sont des homothéties, ils sont en particulier trigonalisables. Supposons qu'il existe donc $h \in C$ qui ne soit pas une homothétie. Puisque $h \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, elle admet une valeur propre $\lambda \in \mathbb{C}$. Alors $F = \ker(\mathrm{id} - \lambda h)$ est tel que $0 < d = \dim(F) < n$. De plus F est stable par h et comme C commutatif, F est stable par C. On dispose donc de $(e_1, \dots, e_n)$ telle que $(e_1, \dots, e_d)$ soit une base de F. Dans cette base, les éléments de C s'écrivent $\begin{pmatrix} h_1 & * \\ 0 & h_2 \end{pmatrix}$. Lorsque h parcourt C, on observe que les matrices h_1 commutent deux à deux, de mêmes pour les matrices h_2. Par hypothèse de récurrence, il existe $(f_1, \dots, f_d)$ base de $\mathrm{Vect}\{e_1, \dots, e_d\}$ telle que h_1 soit triangulaire supérieure. De même, il existe $(f_{d+1}, \dots, f_n)$ base de $\mathrm{Vect}\{e_{d+1}, \dots, e_n\}$ telle que h_2 soit triangulaire supérieure. Donc C est triangulaire supérieure dans $(f_1, \dots, f_n)$. $\square$

Lemme 3. *Soit G un sous-groupe connexe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, alors son sous groupe dérivé est connexe.*

Démonstration. Notons S l'ensemble des commutateurs de G. Alors, S est l'image de $G \times G$ par l'application continue $(g_1, g_2) \mapsto g_1 g_2 (g_1)^{-1} (g_2)^{-1}$. Donc S est connexe. Notons S_m l'ensemble des produits $s_1 \cdots s_m$ pour $s_i \in S$ et $m \geq 1$. C'est l'image de S^m par l'application continue $(g_1, \dots, g_m) \mapsto g_1 \cdots g_m$. Comme S^m est connexe, S_m l'est. Et puisque l'inverse d'un commutateur est encore un commutateur, on a $D(G) = \bigcup_{m \geq 1} S_m$ et $D(G)$ est connexe union de connexes d'intersection deux à deux non vide (l'identité est dans tous les S_m). $\square$

Démonstration du théorème. Dans un premier temps, raisonnons par récurrence sur la dimension n.
On va effectuer en supposant qu'il existe un sous espace $V \subset \mathbb{C}^n$, non trivial et stable par tous les éléments de G. On introduit W un supplémentaire de V dans $\mathbb{C}^n$, donc $\mathbb{C}^n = V \oplus W$ et dans une base adaptée à cette décomposition, les éléments de G s'écrivent par blocs $\begin{pmatrix} g_1 & u \\ 0 & g_2 \end{pmatrix}$. Le morphisme de groupes $G \to \mathrm{GL}(V)$ défini par $g \mapsto g_1$ a pour image un sous-groupe résoluble de $\mathrm{GL}(V)$. Par récurrence, il existe une base de V telle que g_1 soit triangulaire supérieure. De même pour $G \to \mathrm{GL}(W)$, $g \mapsto g_2$ et on dispose donc d'une base de W telle que g_2 soit triangulaire supérieure. De ces deux bases on en déduit une de $\mathbb{C}^n$ et le résultat est démontré.

On pourra donc supposer dans la suite qu'aucun sous-espace non trivial de $\mathbb{C}^n$ n'est stable par G. Comme G est résoluble, il existe un plus petit entier m tel que $D^m(G) = \{1\}$. Montrons par récurrence sur cet entier m que $n = 1$.
Si $m = 1$, $D(G) = \{1\}$, autrement dit G est commutatif et le lemme 2 s'applique. On dispose donc de $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que $PGP^{-1} \subset B$. Le vecteur $e_1 = (1, 0 \dots, 0)$ étant stable par tous les éléments de B, le sous-espace $\mathbb{C}(P^{-1}e_1)$ est stable par tous les éléments de G.
Supposons avoir prouvé que si $D^{m-1}(G) = \{1\}$ alors $n = 1$. Soit G tel que $D^m(G) = \{1\}$ et on peut toujours supposer que $D^{m-1}(G) \neq \{1\}$. Alors, le groupe $H = D^{m-1}(G)$ vérifie $D(H) = \{1\}$ et on peut lui appliquer le lemme 2, et quitte à remplacer G par PGP^{-1}, supposons $H \subset B$. En particulier, e_1 est vecteur propre de chaque élément de H. Soit V le sous-espace engendré par les vecteurs propre des tous les éléments de H. Comme $e_1 \in V$, $\dim(V) \geq 1$ et montrons qu'il est en fait stable par G. Par linéarité, il suffit de prendre $v \in V$ vecteur propre de tout élément de H et de montrer $gv \in V$. Soit $h \in H$, alors

$$h(gv) = gg^{-1}hg(v) = \lambda g(v),$$

car H est distingué dans G et donc v est vecteur propre de $g^{-1}hg$. On a bien V stable par G et par la réduction effectuée précédemment, on a $V = \mathbb{C}^n$. Autrement dit, il existe une base de $\mathbb{C}^n$ formée de vecteurs propres pour tous les éléments de H. Quitte à faire ce changement de base, on peut supposer que $H \subset T$, où T désigne l'ensemble des matrices diagonales.
Fixons maintenant $h \in H$, et comme H distingué, pour tout $g \in G$, $ghg^{-1} \in H$. L'application de G dans H donnée par $g \mapsto ghg^{-1}$ est continue et donc d'image connexe (car G l'est). Mais ghg^{-1} est donc une matrice diagonale de même valeurs propres que celle de h, il n'y donc qu'un nombre fini de telles matrices. L'application est donc d'image finie et connexe, elle est constante. Autrement dit $\forall g \in G$, $ghg^{-1} = h$ et donc $H \subset Z(G)$.
Considérons maintenant W, un sous-espace propre de h. Comme h commute à tout élément de G, W est stable par G et non réduit à $\{0\}$, donc $W = \mathbb{C}^n$. On dispose donc de $\lambda_h \in \mathbb{C}^*$ tel que $h = \lambda_h \mathrm{id}$. Le déterminant d'un commutateur est égal à 1 et comme $m - 1 \geq 1$, on a $H \subset \mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$. Donc, pour tout $h \in H$, $\lambda_h^n = 1$, et H s'en trouve fini. Mais par le lemme 3, H est connexe et fini donc $H = \{\mathrm{id}\}$, ce qui donne une contradiction avec l'hypothèse initial et conclut donc par récurrence que $n = 1$. $\square$

I Références

1. Algèbre Corporelle, Chambert-Loir, (page 90)