Indécomposabilité de la loi de Poisson

Achille Méthivier

Théorème 1. *Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes et à valeurs entières telles que $Z = X + Y$ suive une loi de Poisson de paramètre λ. Alors X et Y suivent une loi de Poisson*

Lemme 2. *Soit $f = u + iv$ une fonction entière. On note $A(r) = \sup_{|z|=r} \mathfrak{Re} f(z)$ et $f(z) = \sum a_n z^n$. Alors,*

1.
$$\forall n \geq 1 \, \forall r > 0 \quad |a_n| \leq 2 \frac{A(r) - u(0)}{r^n}$$

2. *si $d \geq 0$ et $A(r) = O(r^d)$ quand $r \to \infty$, alors f est un polynôme de degré au plus d.*

Démonstration. Soit $r > 0$ fixé, comme f est entière, la série trigonométrique $\theta \mapsto \sum a_n r^n \mathrm{e}^{in\theta}$ converge normalement vers $f(r\,\mathrm{e}^{i\theta})$. En intervertissant somme infinie et intégrale, on obtient les deux formules suivantes :

$$a_n r^n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(r\,\mathrm{e}^{i\theta})\,\mathrm{e}^{-in\theta}\,\mathrm{d}\theta. \tag{1}$$

$$0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(r\,\mathrm{e}^{i\theta})\,\mathrm{e}^{in\theta}\,\mathrm{d}\theta. \tag{2}$$

On faisant $(1) + \overline{(2)}$, on obtient

$$a_n r^n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} u(r\,\mathrm{e}^{i\theta})\,\mathrm{e}^{-in\theta}\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \big(u(r\,\mathrm{e}^{i\theta}) - A(r)\big)\,\mathrm{e}^{-in\theta}\,\mathrm{d}\theta,$$

car $\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{-in\theta}\,\mathrm{d}\theta = 0$. En passant aux modules dans la dernière relation et en remarquant que $|u(r\,\mathrm{e}^{i\theta}) - A(r)| = A(r) - u(r\,\mathrm{e}^{i\theta})$, on a

$$|a_n| r^n \leq \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \big(A(r) - u(r\,\mathrm{e}^{i\theta})\big)\,\mathrm{d}\theta = 2\,(A(r) - u(0))\,.$$

En effet la relation (1) pour $n = 0$ donne, en prenant les parties réelles,

$$u(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u\left(r\,\mathrm{e}^{i\theta}\right)\mathrm{d}\theta.$$

Ce qui démontre la première assertion.
Finalement, si $A(r) = O(r^d)$, le passage à la limite dans l'inégalité $|a_n| \leq 2\frac{A(r)-u(0}{r^n}$ lorsque $r \to \infty$, donne $|a_n| = 0$ pour tout $n > d$. □

Démonstration du théorème. Notons $f(z) = \mathbb{E}(z^X) = \sum_{n\geq 0} p_n z^n$ et $g(z) = \mathbb{E}(z^Y) = \sum_{n\geq 0} q_n z^n$ les séries génératrices de X et Y. On sait qu'il y a convergence normale des séries génératrices sur le disque unité. De plus, par indépendance de X et Y, on a

$$\forall |z| \leq 1 \quad f(z)g(z) = \mathbb{E}(z^X)\mathbb{E}(z^Y) = \mathbb{E}(z^{X+Y}) = \mathrm{e}^{\lambda(z-1)}\,.$$

Comme il y a convergence absolue des séries sur $|z| < 1$, par produit de Cauchy, on a les relations

$$p_0 q_0 = \mathrm{e}^{-\lambda}, \quad \text{donc } p_0 \neq 0 \quad q_0 \neq 0,$$

et pour $n \geq 1$,

$$\mathrm{e}^{-\lambda}\,\frac{\lambda^n}{n!} = \sum_{k=0}^{n} p_k q_{n-k} \geq \max(p_n q_0, p_0 q_n).$$

Donc $p_n \leq \mathrm{e}^{-\lambda}\,\frac{\lambda^n}{n!} q_0^{-1}$, et la série entière $\sum_{n\geq 0} p_n z^n$ a donc un rayon de convergence infinie, elle est en particulier holomorphe sur $\mathbb{C}$. De même pour $\sum_{n\geq 0} q_n z^n$. Et par prolongement analytique, l'identité $f(z)g(z) = \mathrm{e}^{\lambda(z-1)}$ valable sur $|z| < 1$ se prolonge à $\mathbb{C}$.
Si $|z| = r \geq 1$, $|f(z)| \leq f(|z|) = f(r)$ et $q_0 f(r) \leq f(r)g(r) = \mathrm{e}^{\lambda(r-1)}$, on peut donc trouver $C \geq 0$ tel que

$$|f(z)| \leq C\,\mathrm{e}^{\lambda(|z|-1)} \quad |g(z)| \leq C\,\mathrm{e}^{\lambda(|z|-1)}\,.$$

Or f et g sont des fonctions entières de s'annulant pas sur $\mathbb{C}$. Il existe donc F et G entières telle que $f = \mathrm{e}^F$ et $g = \mathrm{e}^G$. On reportant dans les inégalités précédentes, on obtient

$$\mathrm{e}^{\mathfrak{Re} F(z)} \leq C\,\mathrm{e}^{\lambda(|z|-1)} \quad \mathrm{e}^{\mathfrak{Re} G(z)} \leq C\,\mathrm{e}^{\lambda(|z|-1)}\,.$$

Donc,

$$\mathfrak{Re} F(z) \leq \ln C + \lambda(|z| - 1) \quad \mathfrak{Re} G(z) \leq \ln C + \lambda(|z| - 1),$$

Alors F et G vérifient les hypothèses du lemme 2 et donc il existe α, a, β et $b \in \mathbb{C}$ tels que $f(z) = \mathrm{e}^{\alpha z + a}$ et $g(z) = \mathrm{e}^{\beta z + b}$. Comme $f(1) = 1$, on en déduit $a = -\alpha$ donc $f(z) = \mathrm{e}^{\alpha(z-1)}$ et de même $g(z) = \mathrm{e}^{\beta(z-1)}$. Comme la fonction génératrice caractérise la loi $X \sim \mathscr{P}(\alpha)$ et $Y \sim \mathscr{P}(\beta)$. □

I Références

1. Analyse complexe et applications, Queffélec et Queffélec (page 158 et 296, je crois)