# Caractérisation de la fonction $\Gamma$

Achille Méthivier

**Théorème 1.** *Pour $x > 0$, on définit*

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-t}\, t^{x-1}.$$

*Alors la fonction $\Gamma : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$ ainsi définie vérifie les trois propriétés suivantes :*

1. *pour $x > 0$,*
$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x),$$
2. $\Gamma(1) = 1$.
3. *la fonction $\ln(\Gamma)$ est convexe sur $\mathbb{R}_+^*$,*

*et c'est la seule.*

*Démonstration du théorème.* Établissons les 3 propriétés pour la fonction $\Gamma$. Notons $f(x,t) = \mathrm{e}^{-t}\, t^{x-1}$ définie sur $\left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$. La fonction de $t$ est mesurable car continue et la fonction de $x$ est $C^\infty$. On a, pour $k \in \mathbb{N}$,

$$\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t) = \ln(t)^k\, \mathrm{e}^{-t}\, t^{x-1}.$$

Soit $x \in [a,b] \subset \mathbb{R}_+^*$, on a

$$\left|\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)\right| \leq \varphi_k(t), \quad \varphi_k(t) = \begin{cases} |\ln(t)|^k t^{a-1} & \text{pour } t \in ]0,1] \\ (\ln(t))^k e^{-t} t^{b-1} & \text{pour } t > 1. \end{cases}$$

Or, la fonction $\varphi_k$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$, car $\varphi_k(t) = o(t^{a/2-1})$ quand $t \to 0^+$ et $\varphi_k(t) = O(\mathrm{e}^{-t/2})$ quand $t \to \infty$. On en déduit que $\Gamma$ est de classe $C^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Posons $g(x) = \ln(\Gamma(x))$, on a $g''(x) = \frac{\Gamma\Gamma'' - (\Gamma')^2}{\Gamma^2}$. Or, par l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\left(\int_0^\infty \left(t^{(x-1)/2}\, \mathrm{e}^{-t/2}\right)\left(t^{(x-1)/2} \ln(t)\, \mathrm{e}^{-t/2}\right) \mathrm{d}t\right)^2 \leq \left(\int_0^\infty t^{x-1}\, \mathrm{e}^{-t}\, \mathrm{d}t\right) \left(\int_0^\infty (\ln(t))^2 t^{x-1}\, \mathrm{e}^{-t}\, \mathrm{d}t\right),$$

ce qui donne exactement $\Gamma'(x)^2 \leq \Gamma(x)\Gamma''(x)$ et donc $g''(x) \geq 0$. On a bien que $\ln(\Gamma)$ est convexe. La deuxième assertion est un simple calcule d'intégrale et la première s'obtient par l'intégration par partie suivante

$$\Gamma(x+1) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-t}\, t^x\, \mathrm{d}t = \underbrace{\left[-t^x\, \mathrm{e}^{-t}\right]_0^\infty}_{=0} + \int_0^\infty x t^{x-1}\, \mathrm{e}^{-t}\, \mathrm{d}t = x\Gamma(x),$$

qui est possible puisque $t^x\, \mathrm{e}^{-t} \to 0$ quand $t \to 0$ ou $\infty$.

Considérons maintenant $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$ vérifiant les 3 même assertions et posons $\varphi = \ln(f)$. Par l'assertion (1), il suffit de montrer que $\varphi$ est uniquement déterminer sur l'intervalle $[0,1[$. Or $\varphi(0) = 1$ et pour $x \in ]0,1[$, on a $\varphi(x+1) = \varphi(x) + \ln(x)$. Fixons donc $x \in ]0,1[$, comme $\varphi$ est convexe, la fonction

$$y \neq x \mapsto \frac{\varphi(x) - \varphi(y)}{x - y},$$

est croissante. On a alors,

$$\frac{\varphi(n+1) - \varphi(n)}{n+1-n} \leq \frac{\varphi(n+1) - \varphi(n+1+x)}{n+1-(n+1+x)} \leq \frac{\varphi(n+1) - \varphi(n+2)}{n+1-(n+2)}.$$

Après simplifications,

$$\varphi(n+1) - \varphi(n) \leq \frac{\varphi(n+1+x) - \varphi(n+1)}{x} \leq \varphi(n+2) - \varphi(n+1).$$

Or $\varphi(n+1) = \ln(n!)$, on en déduit

$$\ln(n) \leq \frac{\varphi(n+1+x) - \varphi(n+1)}{x} \leq \ln(n+1).$$

De plus,

$$\varphi(n+1+x) = \varphi(x) + \ln[x(x+1)\ldots(x+n)],$$

donc

$$x\ln(x) \leq \varphi(x) + \ln[x(x+1)\ldots(x+n)] - \ln(n!) \leq x\ln(n+1),$$

et finalement

$$0 \leq \varphi(x) - \ln\left(\frac{n! n^x}{x(x+1)\ldots(x+n)}\right) \leq x\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

L'expression de droite tend vers 0 lorsque $n \to \infty$, on en déduit que $\varphi(x)$ est uniquement déterminée. $\square$

## I Références


1. Analyse, Gourdon (page 296)
2. Principles of mathematical analysis, Rudin (page 193)