Développement asymptotique de la série harmonique

Achille Méthivier

Théorème 1. *Soit $(H_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite des sommes partielles de la série harmonique, définie pour $n \in \mathbb{N}^*$,*

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

Alors, pour $r \in \mathbb{N}^*$, la suite $(H_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ admet le développement asymptotique à l'ordre r suivant

$$H_n = \ln(n) + \gamma + \sum_{k=2}^{r-1} \frac{(-1)^{k-1} b_k}{k} \frac{1}{n^k} + O\left(\frac{1}{n^r}\right),$$

où γ est la constante d'Euler, et b_k le k-ième nombre de Bernoulli.

Lemme 2. *Soient $(m,n) \in \mathbb{Z}^2$, $r \in \mathbb{N}^*$ avec $m < n$ et $f : [m,n] \to \mathbb{C}$ une fonction de classe C^r. Alors,*

$$\sum_{k=m}^{n} f(k) = \int_m^n f(t)\,\mathrm{d}t + \frac{1}{2}\left(f(m) + f(n)\right) + \sum_{k=2}^{n} \frac{b_k}{k!}\left(f^{(k-1)}(n) - f^{(k-1)}(m)\right) + R_r,$$

avec

$$R_r = \frac{(-1)^{r+1}}{r!} \int_m^n \tilde{B}_r(t) f^{(r)}(t)\,\mathrm{d}t,$$

où $\tilde{B}_r$ est la fonction 1-périodique qui coïncide sur $]0,1[$ avec le r-ième polynôme de Bernoulli B_r et vérifie $\tilde{B}_r(0) = \frac{1}{2}(B_r(0) + B_r(1))$.

Démonstration. Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto \sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{(n+1)!}$, qui vérifie pour $z \in \mathbb{C}^*$, $f(z) = \frac{e^z - 1}{z}$. Comme $f(0) = 1 \neq 0$, $1/f$ est développable en série entière sur un voisinage de 0, on introduit donc la suite des nombres de Bernoulli $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant

$$\frac{z}{e^z - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{n!} z^n.$$

En faisant un produit de Cauchy sur le disque de convergence de cette série, on obtient

$$\forall x \in \mathbb{C}\ \forall |z| < R \quad g(z,x) = \frac{ze^{zx}}{e^z - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n(x)}{n!} z^n.$$

Démontrons les propriétés suivantes sur les polynômes de Bernoulli

1. $\forall n \in \mathbb{N} \quad B_n(1-x) = (-1)^n B_n(x)$,
2. $\forall n \in \mathbb{N} \quad B_n(x+1) - B_n(x) = nx^{n-1}$,
3. $\forall n \in \mathbb{N} \quad B_n' = nB_{n-1}$.

Pour $x \in \mathbb{R}$, la première et deuxième assertions s'obtiennent par un simple calcul de séries sur un disque de convergence pour $g(\cdot, x)$,

$$\frac{z\,\mathrm{e}^{z(1-x)}}{\mathrm{e}^z - 1} = \frac{-z e^{(-z)x}}{\mathrm{e}^{-z} - 1},$$

et

$$\frac{ze^{z(x+1)}}{e^z - 1} = z\,\mathrm{e}^{zx} + \frac{ze^{zx}}{e^z - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} z^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n(x)}{n!} z^n,$$

et unicités des coefficients. L'autre assertion s'obtient en justifiant l'interversion de la dérivation et du signe somme. Par convergence normale de la série $z \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n(x)}{n!} z^n$, on peut intervertir intégrale et signe somme, d'où pour $\rho < R$,

$$2\pi\rho^n \frac{B_n(x)}{n!} = \int_0^{2\pi} g(\rho\,\mathrm{e}^{i\theta}, x)\,\mathrm{e}^{-in\theta}\,\mathrm{d}\theta.$$

L'intégrande étant continument dérivable par rapport à x sur $\mathbb{R}$, on obtient

$$2\pi\rho^n \frac{B_n'(x)}{n!} = \int_0^{2\pi} \rho\,\mathrm{e}^{i\theta}\, g(\rho\,\mathrm{e}^{i\theta}, x)\,\mathrm{e}^{-in\theta}\,\mathrm{d}\theta = 2\pi\rho^n \frac{B_{n-1}(x)}{(n-1)!}.$$

Démontrons maintenant la formule du lemme par récurrence sur r
Pour $r = 1$, comme $B_1(x) = x - 1/2$ sur $]0,1[$, une intégration par parties donne pour tout entier $m \leq k \leq n-1$,

$$\int_k^{k+1} \tilde{B}_1(t) f'(t)\,\mathrm{d}t = \left[\tilde{B}_1(t) f(t)\right]_k^{k+1} - \int_k^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{f(k+1) - f(k)}{2} - \int_k^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

En somment ces relations pour $m \leq k \leq n-1$,

$$\int_m^n \tilde{B}_1(t) f'(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=m}^{n} f(k) - \frac{f(m) + f(n)}{2} - \int_m^n f(t)\,\mathrm{d}t,$$

d'où l'initialisation.
Supposons le résultat pour $r - 1 \in \mathbb{N}^*$. Soit $m \leq k \leq n-1$. Sur $]k, k+1[$, on a

$\tilde{B}'_r = r\tilde{B}_{r-1}$ et comme $r \geq 2$, $B_r(0) = B_r(1) = b_r$ donc par définition, $\tilde{B}_r$ continue sur $[k, k+1]$. En intégrant par parties, on obtient

$$\begin{aligned}\frac{1}{(r-1)!}\int_k^{k+1} \tilde{B}_{r-1}(t) f^{(r-1)}(t)\,\mathrm{d}t &= \frac{1}{r!}\left[\tilde{B}_r(t) f^{(r-1)}(t)\right]_k^{k+1} \\ &\quad - \frac{1}{r!}\int_k^{k+1} \tilde{B}_r(t) f^{(r)}(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{b_r}{r!}\left(f^{(r-1)}(k+1) - f^{(r-1)}(k)\right) \\ &\quad - \frac{1}{r!}\int_k^{k+1} \tilde{B}_r(t) f^{(r)}(t)\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

En sommant pour $m \leq k \leq n-1$ en multipliant par $(-1)^r$, on obtient

$$R_{r-1} = \frac{(-1)^r b_r}{r!}\left(f^{(r-1)}(n) - f^{(r-1)}(m)\right) + R_r.$$

Or si r pair, $(-1)^r b_r = b_r$ et de même si r impair car dans ce cas $b_r = 0$. Ce qui achève la récurrence.

$\square$

Démonstration du théorème. Appliquons la formule du lemme 2 à $f(t) = 1/t$ entre 1 et n. Comme $f^{(k)}(t) = (-1)^k k!/t^{k+1}$, on a

$$\begin{aligned}H_n &= \int_1^n \frac{\mathrm{d}t}{t} + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right) + \sum_{k=2}^{r} \frac{b_k}{k}\left(\frac{(-1)^{k-1}}{n^k} - (-1)^{k-1}\right) + \frac{(-1)^{r+1}}{r!}\int_1^n \tilde{B}_r(t)\frac{(-1)^r r!}{t^{r+1}}\,\mathrm{d}t \\ &= \ln(n) + \underbrace{\left(\frac{1}{2} + \sum_{k=2}^{r} \frac{(-1)^k b_k}{k} - \int_1^\infty \tilde{B}_r(t)\frac{\mathrm{d}t}{t^{r+1}}\right)}_{=\gamma_r} + \frac{1}{2n} + \sum_{k=2}^{r} (-1)^{k-1}\frac{b_k}{kn^k} + \varepsilon_r(n),\end{aligned}$$

avec

$$\varepsilon_r(n) = \int_n^\infty \tilde{B}_r(t)\frac{\mathrm{d}t}{t^{r+1}},$$

qui vérifie

$$|\varepsilon_r(n)| \leq M\int_n^\infty \frac{\mathrm{d}t}{t^{r+1}} = \frac{M}{rn^r} = O\left(\frac{1}{n^r}\right).$$

On a donc

$$H_n = \ln(n) + \gamma_r + \frac{1}{2n} + \sum_{k=2}^{r-1} \frac{(-1)^{k-1} b_k}{kn^k} + O\left(\frac{1}{n^r}\right),$$

et la constante γ_r est en fait indépendante de r car la formule précédente donne

$$\gamma_r = \lim_{n\to\infty} H_n - \ln(n) = \gamma.$$

$\square$

I Références

1. Analyse, Gourdon (pages 301 à 303)