Commutant d'un endomorphisme

Achille Méthivier

Théorème 1. *Soit K un corps et $A \in \mathcal{M}_n(K)$. On $C[A]$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(K)$ qui commutent avec A et $K[A]$ l'algèbre des polynômes en A. On désigne par μ_A et χ_A le polynômes minimal et caractéristique de A. On a l'équivalence suivante*

$$K[A] = C[A] \iff \mu_A = \chi_A.$$

Lemme 2. *On a* $\dim(C[A]) \geq n$

Démonstration. Regardons $C[A]$ comme un ensemble de solutions d'un système linéaire :

$$C[A] = \left\{ X \in \mathcal{M}_n(K) \ : \ AX - XA = 0 \right\}.$$

Dans un premier temps, supposons A trigonalisable. On dispose de $P \in \mathrm{GL}_n(K)$ et T triangulaire supérieure tels que $A = PTP^{-1}$. Pour $X \in \mathcal{M}_n(K)$, on a

$$\begin{aligned} AX - XA = 0 &\iff PTP^{-1}X - XPTP^{-1} = 0 \\ &\iff TP^{-1}XP - P^{-1}XPT = 0. \end{aligned}$$

Comme $X \mapsto P^{-1}XP$ est un isomorphisme, il préserve en particulier la dimension. Quitte à remplacer A par $P^{-1}AP$, on peut supposer A triangulaire supérieure et on va se restreindre à S, les solutions du systèmes qui sont elles mêmes triangulaires supérieures de telle sorte que $\dim(S) \leq \dim(C[A])$. Le système $AX - XA$ a donc $\frac{n(n+1)}{2}$ inconnues mais les équations diagonales sont de la forme $a_{ii}x_{ii} - x_{ii}a_{ii} = 0$ et sont donc triviales. On obtient finalement $\frac{n(n+1)}{2} - n$ équations pour $\frac{n(n+1)}{2}$ inconnues et on en déduit que l'espace des solutions est au moins de dimension n. Donc $\dim(C[A]) \geq \dim(S) \geq n$, d'où le résultat. Justifions maintenant qu'on peut supposer A trigonalisable. En effet, considérons L corps de décomposition pour χ_A, et A trigonalisable sur L. Or la dimension de l'espace des solutions d'un système est invariant par extension de corps car le rang d'une matrice l'est. En effet, si $B \in \mathcal{M}_n(K)$ est de rang r alors c'est l'entier n maximal pour laquelle il existe un mineur de taille n non nul. Mais les mineurs de B vu comme élément de $\mathcal{M}_n(L)$ sont les mêmes que sur $\mathcal{M}_n(K)$. □

Démonstration du théorème. Supposons $K[A] = C[A]$. On sait que $\dim(K[A]) = \deg(\mu_A) \leq n$, donc $\deg(\mu_A) = n$ et comme, par Cayley-Hamilton, $\mu_A | \chi_A$ et qu'ils sont unitaire, on a bien $\mu_A = \chi_A$.
Supposons maintenant que $\mu_A = \chi_A$. On sait alors que A est cyclique et soit $e \in K^n$ tel que $(e, Ae, \dots, A^{n-1}e)$ base de K^n. Regardons l'endomorphisme $f : B \in C[A] \mapsto Be \in K^n$. Alors f est injectif car si B vérifie $Be = 0$, on a aussi $\forall 0 \leq k \leq n-1 \quad 0 = A^k Be = BA^k e$ car $B \in C[A]$. Donc B s'annule sur une base de K^n, $B = 0$. Finalement, on en déduit $\dim(C[A]) \leq n = \deg(\mu_A) = \dim(K[A])$ et l'inclusion $K[A] \subset C[A]$ couplé au lemme permet de conclure. □

I Références

1. Oraux x-ens : Algèbre 2, Francinou, Gianella, Nicolas (page 160)