Décomposition polaire

Achille Méthivier

Théorème 1. *On désigne par $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ (resp. $\mathscr{S}^{++}(\mathbb{R})$) l'ensemble des matrices symétriques (resp. définies positives) à coefficients réels et $\mathrm{O}(n)$ l'ensemble des matrices orthogonales réelles. L'application*

$$\begin{array}{rccc} \varphi: & \mathrm{O}(n)\times\mathscr{S}^{++}(\mathbb{R}) & \to & \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \\ & (O,S) & \mapsto & OS \end{array}$$

est un homéomorphisme.

Démonstration du théorème. Débutons par l'existence et l'unicité d'une telle décomposition. Pour $(O,S)\in\mathrm{O}(n)\times\mathscr{S}^{++}(\mathbb{R})$, posons $M=OS$. Alors ${}^tMM$ est symétrique définie positive, donc diagonalisable en base orthonormée et de valeurs propres réelles positives. On dispose de $O_1\in\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ et $\lambda_i>0$ tels que

$${}^tMM=O_1\begin{pmatrix}\lambda_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n\end{pmatrix}O_1^{-1}.$$

Si on pose $S=O_1\begin{pmatrix}\sqrt{\lambda_i} & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \sqrt{\lambda_n}\end{pmatrix}O_1^{-1}$, alors S est symétrique définie positive.

En posant $O=MS^{-1}$, on vérifie que $O\in\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ et l'existence de la décomposition polaire en découle.

Pour l'unicité, on dispose de $P\in\mathbb{R}[X]$ vérifiant $P(\lambda_i)=\sqrt{\lambda_i}$ (par exemple polynôme interpolateur de Lagrange). Donc $P({}^tMM)=S$, et si S_1 est une matrice symétrique définie positive vérifiant $S_1^2={}^tMM$. En particulier S_1 commute avec ${}^tMM$ donc avec S. Donc S et S_1 sont diagonalisables dans la même base avec des valeurs propres positives de carrés égaux, elles sont donc égales.

L'application est continue car le produit matricielle l'est. Montrons la continuité de la réciproque. Soit $M\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, alors $M=OS$ sa décomposition polaire, et considérons une suite $(M_k)_{k\in\mathbb{N}}$ convergent vers M. Écrivons $M_k=O_kS_k$ et on veut établir que $O_k\to O$ et $S_k\to S$. Comme $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ est compact, quitte à extraire, on peut supposer que $(O_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers $O'\in\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$. Alors $(S_k)_{k\in N}$ converge vers $O'^{-1}M=S'\in\mathscr{S}(\mathbb{R})$ car c'est un sous-espace vectoriel de dimension finie, donc fermé. Mais S' inversible car produit de matrices inversibles, donc $S'\in\mathscr{S}^{++}(\mathbb{R})$. Autrement dit, $M=O'S'$ et par unicité de la décomposition polaire, $S=S'$ et $O=O'$. La suite $(O_k)_{k\in N}$ à valeurs dans le compact $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ n'a qu'une valeur d'adhérence, elle est donc convergente vers O et donc $(S_k)_{k\in N}$ converge vers S. □

Application 2. *Le groupe $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ admet deux composantes connexes homéomorphes, $\mathrm{GL}_n^+(\mathbb{R})=\{M\in\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})\ :\ \det(M)>0\}$ et $\mathrm{GL}_n^-(\mathbb{R})=\{M\in\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})\ :\ \det(M)<0\}$.*

Démonstration. Établissons que $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ est connexe, et même connexe par arc. Pour $O\in\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$, ils existent $P\in\mathrm{O}(n)$ et $\theta_1,\dots,\theta_k\in[0,2\pi[$ tels que

$$P^{-1}OP=\begin{pmatrix}1 &&&&&&&&\\ &\ddots&&&&&&&\\ &&1&&&&&&\\ &&&-1&&&&&\\ &&&&\ddots&&&&\\ &&&&&-1&&&\\ &&&&&&R(\theta_1)&&\\ &&&&&&&\ddots&\\ &&&&&&&&R(\theta_k)\end{pmatrix},$$

où $R(\theta_i)=\begin{pmatrix}\cos(\theta_i) & -\sin(\theta_i)\\ \sin(\theta_i) & \cos(\theta_i)\end{pmatrix}$. Les -1 sont en nombre pair puisque $\det(O)=1$, on peut donc écrire chaque bloc $\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}=R(\pi)$. Pour $t\in[0,1]$, posons

$$\gamma(t)=\begin{pmatrix}1 &&&&&&&&\\ &\ddots&&&&&&&\\ &&1&&&&&&\\ &&&R(t\pi)&&&&&\\ &&&&\ddots&&&&\\ &&&&&R(t\pi)&&&\\ &&&&&&R(t\theta_1)&&\\ &&&&&&&\ddots&\\ &&&&&&&&R(t\theta_k)\end{pmatrix}.$$

Alors $t\in[0,1]\mapsto P\gamma(t)P^{-1}\in\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ est bien un chemin continu, reliant I_n à O. En posant $\mathrm{SO}_n^-(\mathbb{R})=\{O\in\mathrm{O}_n(\mathbb{R})\ :\ \det(O)=-1\}$, on a un homéomorphisme $O\in\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})\mapsto\mathrm{Diag}(-1,1,\dots,1)\cdot O\in\mathrm{SO}_n^-(\mathbb{R})$ et donc $\mathrm{SO}_n^-(\mathbb{R})$

est connexe (par arcs). Or, la décomposition polaire fournit les homéomorphismes $\mathrm{GL}_n^+(\mathbb{R}) \simeq \mathrm{SO}_n(\mathbb{R}) \times \mathscr{S}^{++}(\mathbb{R})$ et $\mathrm{GL}_n^-(\mathbb{R}) \simeq \mathrm{SO}_n^-(\mathbb{R}) \times \mathscr{S}^{++}(\mathbb{R})$, les membres de droite étant connexes comme produit de connexes. $\square$

I Références

1. Introduction à la théorie des groupes de Lie classiques, Mneimné R., Testard F. (pages 18/19 et 35)