Un isomorphisme entre groupes de Lie

Achille Méthivier

Théorème 1. *Les groupes* $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$ *et* $\mathrm{SO}_2(\mathbb{C})$ *sont isomorphes.*

Lemme 2. *Soit G un groupe topologique et H un sous groupe ouvert de G. Alors H est fermé.*

Démonstration. On a :

$$G = H \sqcup \bigsqcup_{g \notin H} gH.$$

Or, pour $g \in G$, l'application $h \mapsto gh$ est un homéomorphisme. Donc gH est ouvert, d'où le résultat. □

Lemme 3. *On note $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) = \{X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \ : \mathrm{tr}(X) = 0\}$. Soit $H \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, telle que $\forall X \in \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})\ XH = HX$. Alors, il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $H = \lambda I_2$.*

Démonstration. Notons $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. On a $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$. Or,

$$X \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & 0 \\ d & 0 \end{pmatrix}.$$

Et,

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a & b \end{pmatrix}.$$

D'où $b = 0$ et $a = d$. En fait de même avec $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ pour obtenir $c = 0$. □

Démonstration du théorème. Considérons l'action par conjugaison de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ sur $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$. On a donc le morphisme de groupes

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) & \to & \mathrm{Aut}(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})) \\ & A & \mapsto & \varphi_A : X \mapsto AXA^{-1} \end{array}$$

C'est bien une action car $\mathrm{tr}(AXA^{-1}) = \mathrm{tr}(X) = 0$. Comme $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ est un hyperplan de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, on a $\dim(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) = 3$. De plus, pour tout $A \in \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$, φ_A est linéaire, donc $\varphi(\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})) \subset \mathrm{GL}(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}))$.
Plus précisément, on a $\det(\varphi_A(X)) = \det(X)$. Donc $\varphi(\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})) \subset \mathrm{O}(\det)$, groupe orthogonale de la forme quadratique $\det$. Soit $X \in \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$, $X = \begin{pmatrix} a & c \\ b & -a \end{pmatrix}$ avec a, b et $c \in \mathbb{C}$. On regarde le déterminant de X,

$$\det(X) = -a^2 - bc = -a^2 - \frac{1}{4}(b+c)^2 + \frac{1}{4}(b-c)^2.$$

On trouve que $\det$ est la somme du carré de trois formes linéaires de rang 3. Le rang est invariant total de congruence pour les formes quadratiques sur $\mathbb{C}$, en prenant une base orthonormée de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ pour $\det$, on obtient l'identification $\mathrm{O}(\det) \simeq O_3(\mathbb{C})$ (c'est même un difféomorphisme). On a donc $\varphi(\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})) \subset \mathrm{O}_3(\mathbb{C})$, et comme φ continue, $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ connexe et $I_3 \in \varphi(\mathrm{SL}_2(\mathbb{C}))$, on a $\varphi(\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})) \subset \mathrm{SO}_3(\mathbb{C})$.

Montrons l'inclusion réciproque. On va appliquer le théorème d'inversion locale en I_2 pour montrer que $\varphi(\mathrm{SL}_2(\mathbb{C}))$ est ouvert. Soit X, $H \in \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ tel que $||H|| < 1$,

$$\begin{aligned} \varphi(I^2 + H)(X) &= (I^2 + H)X \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k H^k \\ &= (X + HX) \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k H^k \\ &= X + HX - XH - HXH + \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k H^k \end{aligned}$$

Donc $\mathrm{d}_{I_2}\varphi(H) : \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) \to \mathfrak{so}_3(\mathbb{C})$, $X \mapsto HX - XH$. D'après le lemme 3, $\ker(\mathrm{d}_{I_2}\varphi) = \{H \in \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) \ : \ \forall X \in \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})\ HX = XH\} = \{H : H = \lambda I_2,\ \mathrm{tr}(H) = 0\} = \{0\}$. Or $\dim(\mathfrak{so}_3(\mathbb{C})) = 3$, d'où $\mathrm{d}_{I_2}\varphi$ est un isomorphisme. Par l'inversion locale, il existe V, voisinage ouvert de I_2 dans $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$, et W, voisinage ouvert de I_3 dans $\varphi(\mathrm{SL}_2(\mathbb{C}))$ tels que φ soit un homéomorphisme de V sur W. Pour $g \in \varphi(\mathrm{SL}_2(\mathbb{C}))$, $gW \subset \varphi(\mathrm{SL}_2(\mathbb{C}))$ et est un voisinage de g, donc $\varphi(\mathrm{SL}_2(\mathbb{C}))$ est ouvert. Par le lemme 2, c'est aussi un fermé dans $\mathrm{SO}_3(\mathbb{C})$ qui est connexe donc $\varphi(\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})) = \mathrm{SO}_3(\mathbb{C})$.

Finalement, $\ker(\varphi) = \{A \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \ : \ \forall X \in \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})\ AXA^{-1} = X\} = \mathbb{C}^* I_2$, d'où le théorème. □

I Références

1. Histoire hédoniste de groupes et géométries, Caldero P., Germoni J. (page 273)