190 — Méthodes combinatoires, problèmes de dénombrement.

I Quelques outils de combinatoire

1) Outils ensembliste

[G]

lem1 (Principe des tiroirs) : E, F deux ensembles finis avec $|E|>|F|$. Si $f: E \to F$ application, alors : $\exists y \in F$ tq $|f^{-1}(\{y\})| \geq 2$

lem 2 (du berger) : $f: E \to F$ application entre ensembles finis. Si $\forall y \in F$, $|f^{-1}(\{y\})| = n$, alors $|F| = n|E|$.

prop3 (formule du crible) : $A_1, \dots, A_n$ des ensembles finis. $\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} |A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}|$

thm4 : On considère une urne contenant n boules et on souhaite compter le nombre de façon d'en tirer k. On a le tableau suivant :

	avec ordre	sans ordre
avec remise	n^k	$\binom{n+k-1}{k}$
sans remise	arrangement : $\frac{n!}{(n-k)!}$	combinaison $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

prop5 : Soient $0 \leq k \leq n$, on a
- $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ (symétrie)
- $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$ (Pascal)
- $\binom{n+1}{k+1} = \frac{n+1}{k+1}\binom{n}{k}$

prop 6 (Vandermonde) : $m, n, p \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^{p} \binom{n}{k}\binom{m}{p-k} = \binom{n+m}{p}$

ex 7 : Le nbre d'anagramme de BANANE est $\binom{6}{2}\binom{4}{2}\binom{2}{1}\binom{1}{1} = \frac{6!}{2!2!}$

2) Outils "groupiste"

[NH2G2 T2]

Soit G un groupe agissant sur X un ensemble, X/G l'ens des orbites pour l'action et $Stab_G(x) = \{g \in G : g \cdot x = x\}$ le stabilisateur de $x \in X$ par l'action.

def8 : l'action de G sur X est
- libre si tous les stabilisateurs des pts de X sont triviaux.
- transitive si $\forall x, y \in X$, $\exists g \in G : g \cdot x = y$

[NH2G2 T1]

prop9 (equation aux classes) : Si G, X finis, on a $|X| = \sum_{O \in X/G} |O| = \sum_{i=1}^{|X/G|} \frac{|G|}{Stab(x_i)}$ où $x_1, \dots, x_{|X/G|}$ système de représentant des orbites

prop10 (formule Burnside) : Si G, X finis, on a $|X/G| = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |Fix_g|$ où $Fix_g = \{x \in X : g \cdot x = x\}$

[CVA]

II Combinatoire algébrique

1) Cardinaux de certains "objets" sur $\mathbb{F}_q$

Soit $\mathbb{F}_q$ un corps à q éléments.

def11 : K un corps le groupe projectif linéaire $PGL_n(K)$ est le quotient $GL_n(K)/K^* id$, le groupe projectif special linéaire est le quotient $SL_n(K)/\mu_n(K) id$ où μ_n est le groupe des racines n-ième de l'unité.

def12 : Un drapeau complet de K^n est un $(n+1)$-uplet de sev de K^n $(F_0, \dots, F_n)$ tq $\dim F_i = i$ et $\{0\} = F_0 \subset \dots \subset F_n = K^n$.

[NH2G2 T2]

prop13 :
- i) $|\mathbb{F}_q^n| = q^n$,
- ii) $|GL_n(\mathbb{F}_q)| = (q^n - q) \dots (q^n - q^{n-1})$
- iii) $|PGL_n(\mathbb{F}_q)| = (q^n - 1) \dots (q^2 - 1) q^{n(n-1)/2}$
- iv) $|SL_n(\mathbb{F}_q)| = (q^n - 1) \dots (q^2 - 1) q^{n(n-1)/2}$
- v) $|PSL_n(\mathbb{F}_q)| = \frac{|SL_n(\mathbb{F}_q)|}{d}$ où $d = pgcd(q-1, n)$
- vi) "variété" de drapeaux : $\mathcal{F}_n(\mathbb{F}_q) = \{$drapeaux complets de $\mathbb{F}_q^n\}$? $|\mathcal{F}_n(\mathbb{F}_q)| = \prod_{k=1}^{n-1} (1 + q + \dots + q^k)$

prop14 : Tous p-Sylow de $GL_n(\mathbb{F}_q)$ est isomorphe à $U_n = \{$matrice triangulaire supérieur avec 1 sur diagonale

De plus l'ens. des p-Sylow est en bijection avec l'ens des drapeaux complets de $\mathbb{F}_q^n$.

thm 15 (iso. exceptionnels). $\mathfrak{S}_n$ a les iso de groupes

i) $GL_2(\mathbb{F}_2) \simeq SL_2(\mathbb{F}_2) \simeq PSL_2(\mathbb{F}_2) \simeq PGL_2(\mathbb{F}_2) \simeq \mathfrak{S}_3$

ii) $PSL_2(\mathbb{F}_3) \simeq \mathfrak{A}_4$, $PGL_2(\mathbb{F}_3) \simeq \mathfrak{S}_4$

iii) $PGL_2(\mathbb{F}_4) = PSL_2(\mathbb{F}_4) \simeq \mathfrak{A}_5$

iv) $PSL_2(\mathbb{F}_5) \simeq \mathfrak{A}_5$, $PGL_2(\mathbb{F}_5) \simeq \mathfrak{S}_5$

[NH2G2 t2]

2) Réduction

Notation: $g_n = |GL_n(\mathbb{F}_q)|$, $\mathcal{D}_n = \{$mat. diagonalisable sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{F}_q)\}$, d_n son cardinal, $\mathcal{T}_n = \{$mat. trigonalisable sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{F}_q)\}$, t_n son cardinal, $\mathcal{N}_n = \{$mat nilpotente sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{F}_q)\}$, $\mathcal{V}_n$ son cardinal

lemme 16: $A \in \mathcal{M}_n(K)$ est diagonalisable ssi il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ val. propre de A tq $E = \bigoplus_{i=1}^{p} E_{\lambda_i}$ $\quad E_\lambda = \ker(A - \lambda id)$

[NH2G2 t2]

thm 17: $d_n = \sum_{\substack{k_1 + \dots + k_q = n \\ k_i \geq 0}} \frac{g_n}{\prod_{i=1}^{q} g_{k_i}}$

lem 18 (Fitting): $u \in End_{\mathbb{F}_q}(\mathbb{F}_q^n)$. La suite croissante $(\ker u^k)_k$ et la suite décroissante $(\text{im}\, u^k)_k$ stationnent à partir d'un certain rang n_0 et $E = \ker u^{n_0} \oplus \text{im}\, u^{n_0}$

[CVA]

thm 19: $\mathcal{V}_n = q^{n(n-1)}$

lem 20: $A \in \mathcal{M}_n(K)$ trigonalisable ssi χ_A scindé

thm 20: $t_n = \sum_{\substack{k_1 + \dots + k_q = n \\ k_i \geq 0}} q^{\sum_i k_i(k_i - 1)} \frac{g_n}{\prod_{i=1}^{q} g_{k_i}}$

[NH2G2 t2]

3) Quelques series generatrices.

cor 21: $\sum_{n \geq 0} \frac{d_n}{g_n} z^n = \left(\sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{g_n} \right)^q$

cor 22: $\sum_{n \geq 0} \frac{q^{n^2}}{g_n} z^n = \sum_{n \geq 0} \frac{\mathcal{V}_n}{g_n} z^n \sum_{n \geq 0} z^n$

cor 23: $\sum_{n \geq 0} \frac{t_n}{g_n} z^n = \left(\sum_{n \geq 0} \frac{\mathcal{V}_n}{g_n} z^n \right)^q$

[CVA]

def 24: Le nombre $p(n)$ est le nombre de partitions du nombre $n \in \mathbb{N}$.

ex 25: $p(4) = 5$: 4; $3+1$; $2+2$; $2+1+1$; $1+1+1+1$.

thm 26 (Jordan): Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ nilpotente, alors il existe une unique suite decroissante d'entiers naturels non nuls $(p_1, \dots, p_m)$ tq A soit semblable à $J_{(p_1, \dots, p_m)}$ où $J_{(p_1, \dots, p_m)} = \begin{pmatrix} J_{p_1} & & \\ & \ddots & \\ & & J_{p_m} \end{pmatrix}$ et $J_p = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ \vdots & & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$

cor 27: Soit $s(X) = \sum_{n \geq 0} p(n) X^n$. Le nombre de classes de conjugaison pour l'action de $GL_n(\mathbb{C})$ sur le cône nilpotent $\mathcal{N}_n(\mathbb{C})$ est $p(n)$ égal au coefficient de X^n dans le produit infini $s(X) = \prod_{k \geq 1} \frac{1}{1 - X^k}$

[NH2G2 t1]

def 28: $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ se décompose en cycles disjoints (en comptant les cycles de longueur 1) σ_i de support C_i avec $1 \leq i \leq p$. Le type de σ est la partition $(k_1, \dots, k_p)$ de n où $k_i = |C_i|$

prop 29 $\sigma, \sigma' \in \mathfrak{S}_n$ sont conjugués ssi elles sont de même types

cor 30: Il y a $p(n)$ classes de conjugaison dans $\mathfrak{S}_n$.

[NH2G2 t2]

[P]

III Autour de $\mathfrak{S}_n$

1) Automorphismes de $\mathfrak{S}_n$

<u>def 31</u> : G un groupe, $\varphi \in Aut(G)$ est intérieur s'il existe $g \in G$ tq $\varphi(h) = ghg^{-1}$ $\forall h \in G$.

<u>rmq 32</u> : On note $C(a) = \{g \in G : gag^{-1} = a\}$ le centralisateur (= stabilisateur pr l'action par conjugaison) de $a \in G$.

<u>prop 33</u> : Soit $\varphi \in Aut(\mathfrak{S}_n)$, si φ envoie transposition sur transposition, alors φ est intérieur

<u>lem 34</u> : Si $s \in \mathfrak{S}_n$ est de type $(k_n, \dots, k_1)$ avec $k_i \geq 0$ (on a k_i cycles d'ordre i), alors

$$|C(s)| = \prod_{i=1}^{n} k_i! \, i^{k_i}$$

<u>thm 35</u> : Si $n \neq 6$, $Aut(\mathfrak{S}_n) = Int(\mathfrak{S}_n)$

<u>rmq 36</u> : Pr $n \neq 2$, $Aut(\mathfrak{S}_n) \simeq Int(\mathfrak{S}_n)$ car $Z(\mathfrak{S}_n) = \{id\}$.

[FGN]

2) Décomposition de Bruhat.

K un corps quelconque, B le ss-groupe de $GL_n(K)$ composé des matrices triangulaires supérieures.

<u>thm 37</u> (Décomposition Bruhat). Soit $A \in GL_n(K)$, alors il existe $T_1, T_2 \in B$ et P_σ matrice de permutation tels que $A = T_1 P_\sigma T_2$. De plus $GL_n(K) = \bigsqcup_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} B P_\sigma B$.

<u>lem 38</u> : On a une action transitive de $GL_n(K)$ sur $\mathcal{F}_n(K)$ qui induit une bijection entre $\mathcal{F}_n(K)$ et $GL_n(K)/B$

<u>prop 39</u> : L'action de $GL_n(K)$ sur $GL_n(K)/B \times GL_n(K)/B$ définie par $A.(\bar{X}, \bar{Y}) = (\overline{AX}, \overline{AY})$ donne une bijection entre l'ensemble des orbites de cette action et $\mathfrak{S}_n$.

3) Un peu de probabilités.

[CVA]

<u>prop 40</u> : Le nombre de dérangement (ie de permutation sans pt fixe) dans $\mathfrak{S}_n$ est $D_n = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$

[H2G2 Ei]

<u>lem 41</u> : Soit $c_n(\sigma)$ le nb de cycles (en comptant les cycles de longueurs 1) dans la décomposition en cycles disjoints de $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ (ex : $c_n(id) = n$). On pose $P_n = X(X+1)(X+2)\cdots(X+n-1)$ et $R_n = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} X^{c_n(\sigma)}$. On a $P_n = R_n$

<u>prop 42</u> : La moyenne et la variance du nb de cycles dans la décomposition en cycles disjoints sont $\mu := \frac{1}{|\mathfrak{S}_n|} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} c_n(\sigma) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$

$$V = \frac{1}{|\mathfrak{S}_n|} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} (c_n(\sigma) - \mu)^2 = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$$

<u>prop 43</u> : La moyenne et la variance du nb d'éléments fixés par une permutation de $\mathfrak{S}_n$ est 1.

[G] Gourdon, Algebre (et proba) ed3.

[CVA] Carnet de voyage en algebrie

[FGN] Gravx X-ENS Algebre 1

[H2G2t2] Histoires hédoniste de ... t2

[NH2G2t2] Nouvelles histoires hédonistes... t2

[NH2G2t1] Nouvelles histoires hedonistes... t1

[P] Perrin cours d'algebre