Lemme. *Soit E un $K-$ev de dimension 2. $PGL_2(E)$ agit fidèlement sur $P(E)$*

Démonstration. *l'action de $GL_2(E)$ sur $P(E)$ est décrite par*

$$\begin{cases} GL_2(E) \times P(E) & \rightarrow & P(E) \\ (g, \overline{u}) & \rightarrow & \overline{g(u)} \end{cases}$$

ou $\overline{u}$ est la classe du vecteur $u \in E$ dans $P(E)$ Cette action donne un morphisme de groupe

$\phi : GL(E) \rightarrow \mathfrak{S}(P(E))$ Soit $g \in ker(\phi)$. Alors $\forall (x_1, x_2) \in E$, $\exists \lambda \in K$, tel que $g(x_1, x_2) = (\lambda x_1, \lambda x_2)$. Soient $x, y \in E \setminus \{0\}$ linéairement indépendants. il existe $\lambda, \mu \in K$ tels que $g(x) = \lambda x$ et $g(y) = \mu y$ Mais aussi il existe $\nu \in K$ tel que $g(x+y) = \nu(x+y)$ donc $(\lambda - \nu)x + (\mu - \nu)y = 0$. Par inidépendance de x et y, $\lambda = \mu = \nu$ et $g = \lambda Id_E$ Ainsi $ker(\phi) = \{\lambda Id_E | \ \lambda \in K\}$ donc par le premier théorème d'isomorphisme, ϕ se factorise en un morphisme injective $\tilde{\phi} : GL(E)/Z(GL(E)) = PGL(E) \rightarrow P(E)$

On suppose maintenant que K est un corps fini à q éléments

Lemme. $|P(E)| = q + 1$, $PGL(E)| = q(q-1)(q+1)$

Démonstration. *Chaque élément non nul de E se trouve sur exactement une droite donc*

$$\begin{aligned} |E| &= |E \setminus \{0\}| + 1 \\ q^2 &= |K^*||P(E)| + 1 \\ |P(E)| &= \frac{q^2 - 1}{q - 1} = q + 1 \end{aligned}$$

Pour se donner une matrice dans $GL(E)$ il faut choisir un premier vecteur colonne non nul, donc $q^2 - 1$ choix. Puis un deuxième vecteur colonne qui n'est pas multiple du premier donc $q^2 - q$ choix.

$$\begin{aligned} |GL(E)| &= (q^2 - 1)(q^2 - q) \\ PGL(E) &= \frac{(q^2-1)(q^2-q)}{q-1} = q(q^2 - 1) = q(q-1)(q+1) \end{aligned}$$

Lemme. *Si $n \geq 5$, un sous-groupe d'indice n de $\mathfrak{S}_n$ est isomorphe à $\mathfrak{S}_{n-1}$.*

Démonstration. *soit $H < \mathfrak{S}_n$ d'indice n, et $X := \mathfrak{S}_n/H$. $\mathfrak{S}_n$ agit sur X par translation à gauche ce qui donne un morphisme de groupe $\Psi : \mathfrak{S}_n \rightarrow \mathfrak{S}(X)$ avec $ker(\Psi) \triangleleft \mathfrak{S}_n$. Or comme $n \geq 5$ les seuls groupes distigués de $\mathfrak{S}_n$ sont $\{id\}$, $\mathfrak{A}_n$ et $\mathfrak{S}_n$. Mais comme $ker(\Psi) \subset H$, $|ker(\Psi)| \leq (n-1)! < \frac{n!}{2} = \mathfrak{A}_n$ donc $ker(\Psi) = \{id\}$ et Ψ est injectif. Or comme $|\mathfrak{S}_n/H| = n$, Ψ est un isomorphisme et on a*

$H \sim \Psi(H) = \{\sigma \in \mathfrak{S}(X) | \ \sigma(H) = H\} \sim \mathfrak{S}(X \setminus \{H\}) \sim \mathfrak{S}_{n-1}$

théorème. $PGL_2(\mathbb{F}_5) \sim \mathfrak{S}_5$

On a $|PGL_2(\mathbb{F}_5)| = 5 \times 4 \times 6 = 5! = |\mathfrak{S}_5|$. Par le morphisme $\tilde{\phi}$ définit plus haut, $H := \tilde{\phi}(PGL_2(\mathbb{F}_5))$ est un sous groupe de $\mathfrak{S}_6$ d'indice $\frac{6!}{5!} = 6$. Par le Lemme, $PGL_2(\mathbb{F}_5) \sim H \sim \mathfrak{S}_5$

théorème. *Il existe un automorphisme exterieur dans $\mathfrak{S}_6$*

Démonstration. *On a un un morphisme $\tilde{\phi} : PGL_2(E) \rightarrow \mathfrak{S}_6$ injectif, $H = \tilde{\phi}(PGL_2(E))$. $\mathfrak{S}_6$ agit transitivement sur $X = \mathfrak{S}_6/H$ par translation à gauche. cette action induit un automorphisme*

$$\begin{array}{cccc} \Psi & : & \mathfrak{S}_6 & \rightarrow & \mathfrak{S}(\mathfrak{S}_6/H) \sim \mathfrak{S}_6 \\ & & H & \rightarrow & stab\{\overline{e}\} \end{array}$$

Donc H agit transitivement sur un ensemble à 6 éléments mais pas $\Psi(H)$. Or si Ψ etait intérieur, alors il existe $\sigma \in \mathfrak{S}_6$ tel que $\Psi(\tau) = \sigma\tau\sigma^{-1}$. Soient $i, j \in \{1, ..., 6\}$ il existe $h \in H$ tel que $h(\sigma^{-1}(i)) = \sigma^{-1}(j)$ et alors $\Psi(h)(i) = \sigma h \sigma^{-1}(i) = \sigma\sigma^{-1}(j) = j$ et $\Psi(H)$ agirait alors transitivement sur $\{1, ..., 6\}$ ce qui n'est pas le cas donc Ψ est exterieur.