Lemme. *Soient M, N deux points distincts du plan de coordonées barycentriques (x_1, y_1, z_1) et (x_2, y_2, z_2) respectivement. Alors (MN) a pour équation :*

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ X & Y & Z \end{vmatrix} = 0$$

Démonstration. *On suppose sans changer l'anulation du système que les coordonées barycentrique sont de somme 1 ($x_1 + y_1 + z_1 = x_2 + y_2 + z_2 = 1$). P un point de coordonnées (X, Y, Z), $X + Y + Z = 1$ est dans (MN) s'il existe t tel que $MP = tMN$. C'est à dire :*

$$\begin{cases} X - x_1 &= t(x_2 - x_1) \\ Y - y_1 &= t(y_2 - y_1) \\ Z - z_1 &= t(z_2 - z_1) \end{cases}$$

Comme les coordonées sont de somme 1, la dernière ligne vaut moins la somme des deux autre, donc t vérifie le système des deux premières lignes :

$$0 = \begin{vmatrix} X - x_1 & x_2 - x_1 \\ Y - y_1 & y_2 - y_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} X - x_1 & x_2 - x_1 & x_1 \\ Y - y_1 & y_2 - y_1 & y_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} X & x_2 & x_1 \\ Y & y_2 & y_1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} X & x_2 & x_1 \\ Y & y_2 & y_1 \\ Z & z_2 & z_1 \end{vmatrix}$$

Lemme. *Soient ABS et $R = (A, \vec{AB}, \vec{AC})$ le repère affine correspondant. L'équation d'un conique passant par A, B, C est $pYZ + qZX + rXY = 0$ où p, q, r sont non tous nuls.*

Démonstration. *Soit M de coordonées barycentriques (x, y, z) dans le repère affine (A, B, C). C'est à dire*

$$\begin{aligned} x\vec{AM} + y\vec{BM} + z\vec{CM} &= 0 \\ x\vec{AM} + y\vec{BA} + y\vec{AM} + z\vec{CA} + z\vec{AM} &= 0 \\ (x + y + z)\vec{AM} &= y\vec{AB} + z\vec{AC} \\ \vec{AM} &= \frac{y}{(x + y + z)}\vec{AB} + \frac{z}{(x + y + z)}\vec{AC} \end{aligned}$$

Les coordonnées cartésiennes de M dans R sont donc $(\frac{y}{(x+y+z)}, \frac{z}{(x+y+z)})$. L'équation cartésienne affine des coniques dans R est par définition

$$\alpha_1 U^2 + \alpha_2 UV + \alpha_3 V^2 + \beta_1 U + \beta_2 V + \gamma = 0$$

où $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \neq (0, 0, 0)$. On y substitue $U = \frac{Y}{(X+Y+Z)}$ et $V = \frac{Z}{(X+Y+Z)}$, et en mutipliant pas $(X+Y+Z)^2 \neq 0$ on trouve l'équation :

$$\mathcal{D}(X, Y, Z) = \alpha_1 Y^2 + \alpha_2 YZ + \alpha_3 Z^2 + (\beta_1 Y + \beta_2 Z)(X + Y + Z) + \gamma(X + Y + Z)^2 = 0$$

Cette conique passe par A, B et C ssi $\mathcal{D}(1, 0, 0) = \mathcal{D}(0, 1, 0) = \mathcal{D}(0, 0, 1) = 0$ c'est à dire ssi

$$\begin{aligned} \gamma &= 0 \\ \alpha_1 + \beta_1 &= 0 \\ \alpha_3 + \beta_2 &= 0 \end{aligned}$$

Les coniques passant par A, B, C ont donc pour équation

$$-\alpha_1 XY + (\alpha_2 - \alpha_1\alpha_3)YZ - \alpha_3 XZ = 0$$

En posant $p = \alpha_2 - \alpha_1\alpha_3$, $q = -\alpha_3$, $r = -\alpha_1$ on a bien la forme énoncée.

théorème. *Soient 6 points distincts du plan affine A, B, C, A', B', C' trois à trois non-alignés. On suppose que les points $P = (BC') \cap (B'C)$, $Q = (AC') \cap (A'C)$, $R = (AB') \cap (A'B)$ existent. Alors il existe une conique passant par A, B, C, A', B', C' ssi P, Q, R sont alignés.*

Démonstration. *Comme* A, B, C *ne sont pas alignés, considérons le repère barycentrique* ABC. *Notons* (a_1, a_2, a_3), (b_1, b_2, b_3), (c_1, c_2, c_3) *les coordonnées de* A', B', C' . (BC') *a pour equation* $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ X & Y & Z \end{vmatrix} = 0.$ *c'est à dire* $c_3X - c_1Z = 0$. *de la même façon* $(B'C)$ *à pour equation* $b_1Y - b_2X = 0$. *Les coordonnées de* P *qui est l'intersection de ces deux droites est alors* (b_1c_1, c_1b_2, b_1c_3). *On trouve de la même facon* $Q = (a_1c_2, a_2c_2, a_2c_3)$ *et* $R = (a_1b_3, a_3b_2, a_3b_3)$. *Ainsi* P, Q, R *alignés ssi* $R \in (PQ)$ *c'est à dire* $\Delta = \begin{vmatrix} b_1c_1 & c_1b_2 & b_1c_3 \\ a_1c_2 & a_2c_2 & a_2c_3 \\ a_1b_3 & a_3b_2 & a_3b_3 \end{vmatrix} = 0$ *Soit maintenant* $\mathcal{C}$ *une conique passant par* A, B, C. *ON a vu que* $\mathcal{C}$ *est d'équation* $pYZ + qZY + rXY = 0$ *avec* p, q, r *non tous nuls. Or* A', B', C' *sont dans* $\mathcal{C}$ *ssi ils vérifient l'équation donc ssi il existe* $(p, q, r) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ *tels que*

$$\begin{cases} pa_2a_3 + qa_1a_3 + ra_1a_2 & = & 0 \\ pb_2b_3 + qb_1b_3 + rb_1b_2 & = & 0 \\ pc_2c_3 + qc_1c_3 + rc_1c_2 & = & 0 \end{cases}$$

l'existence d'un tel triplet est équivalente a la nullité de

$$\Delta' = \begin{vmatrix} a_2a_3 & a_1a_3 & a_1a_2 \\ b_2b_3 & b_1b_3 & b_1b_2 \\ c_2c_3 & c_1c_3 & c_1c_2 \end{vmatrix}$$

Comme les points A, B, C, A', B', C' *sont trois à trois non alignés,* $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3$ *sont tous non nuls. On obtient en factorisant dans* Δ *la première ligne par* b_1c_1, *la deuxième ligne par* a_2c_2 *et la troisième ligne par* a_3b_3

$$\Delta = b_1c_1a_2c_2a_3b_3 = \begin{vmatrix} 1 & \frac{b_2}{b_1} & \frac{c_3}{c_1} \\ \frac{a_1}{a_2} & 1 & \frac{c_3}{c_2} \\ \frac{a_1}{a_3} & \frac{b_2}{b_3} & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2a_3 & b_2b_3 & c_2c_3 \\ a_1a_3 & b_1b_3 & c_1c_3 \\ a_1a_2 & b_1b_2 & c_1c_2 \end{vmatrix} = \Delta'$$

Ainsi $\Delta' = \Delta$ *donc* $\Delta = 0$ *ssi* $\Delta' = 0$ *ce qui equivaut à l'équivalence souhaitée.*