1.13 Théorème taubérien O de Hardy-Littlewood (et une application aux séries de Fourier) (209, 241, 243) [17]

Quand on regarde une série de fonctions définie, par exemple, sur un disque ouvert dans $\mathbb{C}$, il est commun de chercher des moyens de "prolonger" cette série sur tout ou partie du cercle d'incertitude. Un exemple parlant est la *sommation d'Abel de séries entières*. Si on a une série entière $f(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ de rayon de convergence $R = 1$, alors, si la série $\sum a_n$ converge, on a le théorème d'Abel angulaire :

$$\forall \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right), \quad f(z) \xrightarrow[\substack{z\to 1\\ z\in\mathscr{A}_\theta}]{} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$$

où $\mathscr{A}_\theta$ désigne le secteur angulaire suivant :

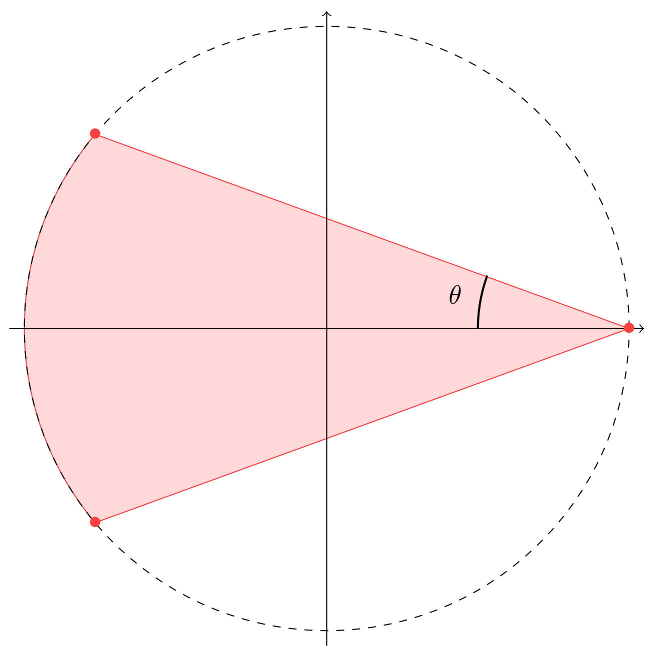


FIGURE 1 – Secteur angulaire $\mathscr{A}_\theta$ pour $\theta = \frac{\pi}{9}$.

Ainsi, la sommation d'Abel est un procédé de sommation qui peut être pertinent pour certaines séries divergentes. On peut également citer la sommation au sens de Cesàro. Le but des théorèmes taubériens est d'énoncer la réciproque au théorème d'Abel : si le procédé de sommation d'Abel converge, alors la série $\sum a_n$ converge et a même limite. C'est évidemment faux en général mais, sous une petite hypothès de décroissance des a_n on a cette réciproque :

Théorème 1.24 (Hardy-Littlewood, version O)**.** Soit $(a_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ telle que $a_n \underset{n\to+\infty}{=} O\left(\frac{1}{n}\right)$ et vérifiant :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \xrightarrow[x\to 1^-]{} \ell \in \mathbb{C}.$$

Alors la série $\sum a_n$ converge et a pour somme ℓ.

Démonstration. Quitte à remplacer a_0 par $a_0 - \ell$ et laisser les autres a_n tels quels, on peut supposer $\ell = 0$. Posons alors l'ensemble $\mathscr{F}$ constitué des fonctions $\varphi : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ vérifiant :

1. Pour tout $x \in [0,1)$, la série $\sum_{n \geqslant 0} a_n \varphi(x^n)$ converge,

2. $\lim_{x \to 1^-} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \varphi(x^n) = 0$.

Étape 1 : Supposons qu'il existe $0 < \delta < 1$ tel que $\mathbb{1}_{[1-\delta,1]} \in \mathscr{F}$

Dans ce cas, on a :

$$0 = \lim_{x \to 1^-} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \mathbb{1}_{[1-\delta,1]}(x^n) = \lim_{x \to 1^-} \sum_{n=0}^{\left\lfloor \frac{\ln(1-\delta)}{\ln(x)} \right\rfloor} a_n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n,$$

ce qui montre que la série $\sum a_n$ converge et a pour somme 0. Le but de la démonstration est donc de montrer que, par exemple, $\mathbb{1}_{\left[\frac{1}{2},1\right]} \in \mathscr{F}$. Pour cela on va encadrer l'indicatrice, que l'on notera g, par des fonctions continues bien choisies, puis, grâce au théorème de Weierstrass, on approchera ces fonctions par des polynômes, qui seront des fonctions de $\mathscr{F}$, pour peu qu'ils s'annulent en 0.

Étape 2 : Les polynômes nuls en 0 sont dans $\mathscr{F}$

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Montrons que le monôme $p_k : x \mapsto x^k$ est dans $\mathscr{F}$. Déjà, pour $x \in [0,1)$, étant donné que la suite (a_n) est bornée, la série $\sum a_n p_k(x^n) = \sum a_n x^{kn}$ converge absolument car $k \neq 0$. De plus, en notant F la somme de la série entière $\sum a_n x^n$, on a :

$$\forall x \in [0,1),\ \forall k \in \mathbb{N}^* \quad \sum_{n=0}^{+\infty} a_n p_k(x^n) = F\left(x^k\right) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

par hypothèse. Ainsi, par linéairté, les polynômes nuls en 0 sont dans $\mathscr{F}$.

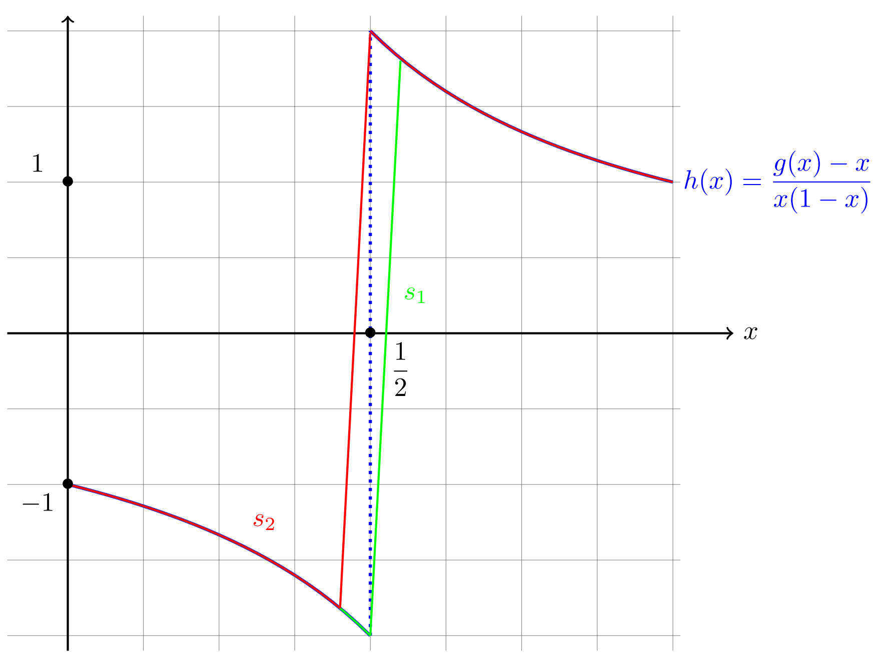
Étape 3 : Prendre l'indicatrice en sandwich

Soient $\varepsilon > 0$ et soient $s_1, s_2 \in \mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ deux fonctions continues telles que :

— $\forall x \in [0,1], \quad x\,(1 + (1-x)s_1(x)) \leqslant g(x) \leqslant x\,(1 + (1-x)s_2(x))$,

— $\int_0^1 (s_2(x) - s_1(x))\, \mathrm{d}x < \varepsilon$.

Le dessin suivant devrait vous convaincre que de telles fonctions existent :



Maintenant, par le théorème de Weierstrass, il existe deux polynômes t_1 et t_2 tels que $\|t_1 - s_1\|_\infty < \varepsilon$ et $\|t_2 - s_2\|_\infty < \varepsilon$ de sorte qu'on puisse prendre en sandwich l'indicatrice par les polynômes $p_1(x) := x + x(1-x)\left(t_1(x) - \varepsilon\right)$ et $p_2(x) := x + x(1-x)\left(t_2(x) - \varepsilon\right)$. On a en effet :

— $p_1 \leqslant g \leqslant p_2$,

— $\displaystyle\int_0^1 \frac{p_2(x) - p_1(x)}{x(1-x)} \mathrm{d}x = \int_0^1 \left(t_2(x) - t_1(x) + 2\varepsilon\right) \mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 \left(s_2(x) - s_1(x) + 4\varepsilon\right) \mathrm{d}x < 5\varepsilon.$

On est prêt à montrer que $g := \mathbb{1}_{\left[\frac{1}{2}, 1\right]} \in \mathscr{F}$. Soit $M > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n|a_n| \leqslant M$. On a alors, en notant $q(x)$ le polynôme $\frac{p_2(x)-p_1(x)}{x(1-x)}$:

$$\begin{aligned}
\forall x \in [0,1), \quad \left| \sum_{n=0}^{+\infty} a_n g\left(x^n\right) - \underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty} a_n p_1\left(x^n\right)}_{\xrightarrow[x \to 1^-]{} 0} \right| &\leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| \left(p_2\left(x^n\right) - p_1\left(x^n\right)\right) \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} |a_n| \left(p_2\left(x^n\right) - p_1\left(x^n\right)\right) \quad \text{car } p_1(1) = p_2(1) = 1, \\
&\leqslant M \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n\left(1 - x^n\right)}{n} q\left(x^n\right) \\
&\leqslant M(1-x) \sum_{n=1}^{+\infty} x^n q\left(x^n\right)
\end{aligned}$$

étant donné que pour $x \in [0,1)$, $1 - x^n = (1-x)\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} x^k \leqslant n(1-x)$. Il ne reste plus qu'à étudier le comportement de cette somme lorsque $x \to 1^-$!

Étape 4 : Comportement de la somme au voisinage de 1 et conclusion

Soit $k \in \mathbb{N}$. Montrons que le monôme $p_k : x \mapsto x^k$ vérifie :

$$(1-x) \sum_{n=1}^{+\infty} x^n p_k\left(x^n\right) \xrightarrow[x \to 1^-]{} \frac{1}{k+1} = \int_0^1 p_k(x) \mathrm{d}x.$$

On a :

$$(1-x) \sum_{n=1}^{+\infty} x^n p_k\left(x^n\right) = (1-x) \sum_{n=1}^{+\infty} x^{n(k+1)} = \frac{x^{k+1}(1-x)}{1 - x^{k+1}} \xrightarrow[x \to 1^-]{} \frac{1}{k+1} = \int_0^1 p_k(x) \mathrm{d}x.$$

Ainsi, par linéarité, pour tout polynôme p, on a :

$$(1-x) \sum_{n=1}^{+\infty} x^n p\left(x^n\right) \xrightarrow[x \to 1^-]{} \int_0^1 p(x) \mathrm{d}x.$$

Ceci est donc vrai également pour le polynôme q ! On a donc :

$$\limsup_{x \to 1^-} \left| \sum_{n=0}^{+\infty} a_n g\left(x^n\right) \right| = \limsup_{x \to 1^-} \left| \sum_{n=0}^{+\infty} a_n g\left(x^n\right) - \underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty} a_n p_1\left(x^n\right)}_{\xrightarrow[x \to 1^-]{} 0} \right| \leqslant \lim_{x \to 1^-} M(1-x) \sum_{n=1}^{+\infty} x^n q\left(x^n\right) = M \int_0^1 q(x) \mathrm{d}x < 5M\varepsilon,$$

la première égalité étant vérifiée du fait que $p_1(0) = 0$ et donc $p_1 \in \mathscr{F}$. Ceci étant vrai pour tout $\varepsilon > 0$, on a donc :

$$\lim_{x \to 1^-} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n g\left(x^n\right) = 0\,!$$

Cela montre donc que notre indicatrice $g \in \mathscr{F}$, et donc que la série $\sum a_n$ converge et est de somme nulle, ce qui conclut la démonstration ! □

Une application non-triviale à ce résultat peut être celle-ci (on remercie Thomas Cavalazzi d'avoir un si grand cerveau) :

Corollaire 1.25. Soit $f \in \mathscr{C}^0_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ tel que $c_n(f) = \underset{|n| \to +\infty}{O}\left(\frac{1}{|n|}\right)$. Alors la série de Fourier de f converge simplement (et même uniformément) vers f.

Démonstration. Pour $r \in [0, 1)$, on définit la fonction :

$$\begin{array}{rccl} P_r & : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & & x & \longmapsto & \displaystyle\sum_{n \in \mathbb{Z}} r^{|n|} e^{inx} \end{array}$$

Il s'agit du noyau de Poisson, et on montre que $(P_r)_{r \to 1^-}$ est une approximation de l'unité (cf. [8] ou [26]). Ainsi :

$$\sup_{x \in [-\pi, \pi]} |P_r * f(x) - f(x)| = \sup_{x \in [-\pi, \pi]} \left| \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(f) e^{inx} r^{|n|} - f(x) \right| \xrightarrow[r \to 1^-]{} 0.$$

Ainsi, la sommation d'Abel de la série de Fourier de f converge uniformément vers f. Posons alors, pour $x \in [-\pi, \pi]$:

$$a_n(x) := c_n(f) e^{inx}.$$

On alors :

$$\sup_{x \in [-\pi, \pi]} |a_n(x)| = \underset{|n| \to +\infty}{O}\left(\frac{1}{|n|}\right).$$

Ainsi, le théorème taubérien de Hardy-Littlewood permet de conclure :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(f) e^{inx} \quad \text{converge et a pour somme} \quad f(x).$$

En reprenant la démonstration du théorème, on peut même prouver que la convergence est uniforme ! □