DEV : Paradoxe de Penney

Référence : D. Lesesvre - 131 dev pour l'agreg

Recasages : 261 - 264 - 266 .

(possibilité de le recaser dans certaines leçons d'algèbre si on raisonne autrement, mais je ne fais pas ça).

Th : On lance une infinité de fois une pièce équilibrée, dont les résultats sont modélisés par des v.a $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tq $X_k = \begin{cases} 1 & \text{si on obtient "pile" au } k^e \text{ lancer} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

On définit : $\begin{cases} T : \text{nombre de lancers au moment où la séquence "F-F-P" apparaît pour la 1ère fois} \\ S : \text{" " " "P-F-F" " " " "} \end{cases}$

On a alors $P(T<S) = \frac{1}{4}$, alors que T et S suivent la même loi (donc en particulier $\underbrace{\mathbb{E}(T)=\mathbb{E}(S)}_{=8}$)

(Rem : Reformulé, le paradoxe de Penney nous dit que si 2 joueurs jouent une ∞té de fois à Pile ou Face, que :

→ J_1 gagne dès que la séquence "F-F-P" apparaît,

→ J_2 gagne dès que la séquence "P-F-F" apparaît.

alors, en moyenne, les 2 joueurs gagnent au bout de 8 lancers, mais J_2 a 3 fois plus de chances de gagner que J_1.)

Preuve :

① Montrons que $P(T<S) = \frac{1}{4}$.

Les 2 premiers lancers sont déterminants. Deux cas sont possibles : (à expliquer à l'oral)

Cas 1 : on obtient 2 faces d'affilée.

Dans ce cas, la séquence "F-F-P" arrivera forcément avant la séquence "P-F-F", puisque pour que la séquence "P-F-F" se produise, il faut d'abord un pile, mais ce pile conclura la séquence "F-F-P".

CCL : On aura alors $T<S$.

Cas 2 : Il y a au moins 1 pile dans les 2 lancers.

Ce sera l'effet inverse. Si on obtient 1 pile (au moins) lors des 2 premiers lancers, alors il faudra 2 faces d'affilée pour commencer la séquence "F-F-P" mais ces 2 faces d'affilée concluront la séquence "P-F-F".

CCL : On aura alors $T>S$.

Ainsi, $P(T<S) = P((X_1=0)\cap(X_2=0))$ (2 faces d'affilée)

$= P(X_1=0)P(X_2=0)$ (indépendance des lancers)

$= \frac{1}{2}\times\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$.

/

(2) Pour obtenir "F-F-P", on doit d'abord obtenir "F-F", que l'on obtient après T' lancers.

On pose : $G := T - T'$

Par définition, $G \to \mathcal{G}\left(\frac{1}{2}\right)$ ← loi géométrique de paramètre $\frac{1}{2}$.

et par indépendance des lancers, G et T' sont indé.

$\forall k \in \mathbb{N}$, on pose $B_k = \begin{cases} 1 & \text{si le } k^e \text{ face est suivi d'un } \cancel{\text{pile}} \text{ face} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

on a alors $B_k \to \mathcal{B}\left(\frac{1}{2}\right)$ ← loi de Bernoulli de par $1/2$

On pose aussi G_k la va qui compte le nb de lancers au moment du k^e face. On a alors $G_k \to \mathcal{G}\left(\frac{1}{2}\right)$.

Voici ce qu'il se passe.

1er face :

$G_1 \xrightarrow{B_1 = 1}$ on a "F-F" $\Rightarrow T' = G_1 + 1$

$G_1 \xrightarrow{B_1 = 0}$ on a "F-P" et on attend un nouveau face

2e face :

$G_2 \xrightarrow{B_2 = 1}$ "F-F" $\Rightarrow T' = (G_1 + 1) + (G_2 + 1)$

$G_2 \xrightarrow{B_2 = 0}$ "F-P", on attend un nouveau face...

et ainsi de suite...

Par récurrence, on obtient :

$$T' = \sum_{k=1}^{G'} (G_k + 1)$$

avec $G' = \inf\{k \in \mathbb{N}^*, B_k = 1\}$

Or, $B_k \to \mathcal{B}\left(\frac{1}{2}\right)$, donc $G' \to \mathcal{G}\left(\frac{1}{2}\right)$ et B_k et G_k étant indépendants, G' et G_k le sont aussi.

③ Pour montrer que S et T ont même loi, on passe par les fonctions génératrices (que l'on notera ϕ_X au lieu de G_X) car elles caractérisent la loi : si $\phi_T = \phi_S$, alors T et S ont $\hat{m}$ loi.

Calculons, $\forall s \in [0,1]$, $\phi_T(s) = \mathbb{E}(s^T)$.

On a $T = G + T'$, avec G et T' indé, donc :

$\forall s \in [0,1]$, $\phi_T(s) = \phi_G(s)\,\phi_{T'}(s)$

Par le théorème de transfert, on a : $\forall s \in [0,1]$:

$$\phi_{T'}(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} s^n P\left(\sum_{k=1}^{G'} (G_k + 1) = n\right)$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} s^n \left(\sum_{i=1}^{+\infty} P\left((G' = i) \cap \left(\sum_{k=1}^{i} (G_k + 1) = n\right)\right)\right)$$

G_k et G' sont indé

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} s^n \sum_{i=1}^{+\infty} P(G' = i)\, P\left(\sum_{k=1}^{i} (G_k + 1) = n\right)$$

Fubini-Tonelli

$$= \sum_{i=1}^{+\infty} P(G' = i) \sum_{n=1}^{+\infty} s^n P\left(\sum_{k=1}^{i} (G_k + 1) = n\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{+\infty} P(G' = i)\, \phi_{T_i}(s) \quad \text{où} \quad T_i := \sum_{k=1}^{i} (G_k + 1)$$

$$= \sum_{i=1}^{+\infty} P(G' = i)\, \phi_{G_1+1}^{\,i}(s) \quad (\text{les } G_k \text{ sont tous de } \hat{m} \text{ loi})$$

$$= \phi_{G'}\left(\phi_{(G_1+1)}(s)\right) = \phi_{G'}\left(s\,\phi_{G_1}(s)\right).$$

$G_1 \hookrightarrow \mathcal{G}\left(\frac{1}{2}\right)$, donc : $\forall s \in [0,1]$:

$$\phi_{G_1}(s) = \frac{\frac{1}{2} \times s}{1 - \frac{1}{2} \times s} = \frac{s}{2 - s}.$$

D'où : $\phi_T(s) = \phi_G(s)\,\phi_{T'}(s)$

$$= \frac{s}{2 - s} \times \frac{s^2/(2 - s)}{2 - \frac{s^2}{2 - s}}$$

donc $\phi_T(s) = \dfrac{s^3}{(2-s)(4-2s-s^2)}$ $\quad (\forall s \in [0,1])$

$$= \frac{s^3}{\underbrace{8-8s+s^3}_{\neq 0 \text{ pour } s \in [0,1]}}$$

En calculant, on trouve $\mathbb{E}(T) = \phi_T'(1) = 8$.
(ne pas faire ce calcul)

④ Intéressons nous à S.

On rappelle : S = nombre de lancers effectués à l'obtention de la séquence "P-F-F"

on pose : S' = nb de lancers jusqu'au 1er pile
$S'' = S - S'$ = obtention de la séquence "F-F".

On a en réalité $S'' = T'$, $S' \to \mathcal{G}\left(\frac{1}{2}\right)$ et par indépendance de S' et T' :

$$\forall t \in [0,1] : \phi_S(t) = \phi_{S'}(t)\,\phi_{S''}(t)$$
$$= \phi_G(T)\,\phi_{T'}(t)$$
$$= \phi_T(t)$$

Ainsi, $\phi_S = \phi_T$.

Donc S et T ont même loi (et même espérance).

D'où le paradoxe de Penney.

$\boxed{}$