Lemme. *Soit $f \in L^p(\mathbb{T})$ alors*

$$\begin{array}{cccc} \Phi_f & : & [0,2\pi[& \to & L^p(\mathbb{T}) \\ & & a & \to & \tau_a f \end{array}$$

est uniformément continue.

Démonstration. *Si $f \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$, Comme $\mathbb{T}$ est compact, f est uniformément continue. Soit $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x, y \in \mathbb{T}$,*

$$d_{\mathbb{T}}(x,y) \leq \delta \implies |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$$

Où $d(x,y)_{\mathbb{T}} = |x-y|\ [2\pi]$. Ainsi si $d_{\mathbb{T}}(a,b) \leq \delta$

$$||\tau_a f - \tau_b f||_p = \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x-a) - f(x-b)|^p\right)^{1/p} \leq \varepsilon$$

Si $f \in L^p(\mathbb{T})$ pas forcément continue. Soit $\varepsilon > 0$Par densité de $\mathcal{C}(\mathbb{T})$ il existe $g \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$ tel que $||f-g||_p \leq \varepsilon/4$. On vient de voir que Φ_g était uniformément continue donc il existe $\delta > 0$ tel que

$$d_{\mathbb{T}}(a,b) \leq \delta \implies ||\Phi_g(a) - \Phi_g(b)||_p \leq \varepsilon/2$$

Alors par concavité de $x \to x^{1/p}$

$$||\Phi_f(a) - \Phi_f(b)||_p \leq 2||f-g||_p + ||\Phi_g(a) - \Phi_g(b)||_p \leq \varepsilon$$

théorème. *On pose $K_N = \sum_{n=0}^{N} D_n$ le noyau de Féjer où D_n est le noyau de Fourier. $\sigma_N(f) = f * K_N$*

- *Si $f \in \mathcal{C}(\mathbb{T})alors||\sigma_N(f)||_\infty \leq ||f||\infty$ et $\sigma_N(f)$ converge uniformément vers f.*
- *Si $f \in L^p(\mathbb{T})$ alors $||\sigma_N(f)||_p \leq ||f||_p$ et $\lim\limits_{N\in\infty} \sigma_N(f) = f$ dans L^p*

Démonstration. *Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$, comme $\int_{-\pi}^{\pi} K_N(t)dt = 1$ On a*

$$||\sigma_N(f)||_\infty = ||f * K_n||_\infty \leq ||f||_\infty$$

On définit le module de continuité de f par

$$\omega(\eta) = sup\{|f(u) - f(v)|\ |\ |u-v| \leq \eta\}$$

Soit $\delta > 0$

$$\begin{aligned} |f(x) - \sigma_N(f)(x)| &= \left|f(x) - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)K_N(t)dt\right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - f(x-t)|K_N(t)dt \\ &\leq \omega(\delta) + 2||f||_\infty \sup_{\delta\leq|t|\leq\pi} K_N(t) \end{aligned}$$

or $\sup\limits_{\delta\leq|t|\leq\pi} K_N(t) \leq \frac{1}{Nsin^2(\delta/2)}$ donc

$$||f - \sigma_N(f)||_\infty \leq \omega(\delta) + 2\frac{||f||_\infty}{Nsin^2(\delta/2)}$$

En passant a la limsup (on ne sait pas si la limite existe mais la limsup est toujours définie, eventuellement ∞) Il vient pour tout $\delta > 0$

$$\limsup_{N\to\infty} ||f - \sigma_N(f)||_\infty \leq \omega(\delta) \leq \inf_{\delta>0} \omega(\delta)$$

Or comme f est unifromément continue car continue sur $\mathbb{T}$ qui est compact, ω est continue en 0 et $\omega(0)=0$. Ainsi $\inf\limits_{\delta>0}\omega(\delta)=0$ et donc

$$0=\limsup_{N\to\infty}||f-\sigma_N(f)||_\infty=\lim_{N\to\infty}||f-\sigma_N(f)||_\infty$$

Si $f\in L^p(\mathbb{T})$, Soit $x\in\mathbb{T}$. Par l'inégalité de Hölder appliqué à la mesure de probabilité $\frac{K_N}{2\pi}dt$

$$|\sigma_N(f)(x)|^p\leq\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x-t)|^pK_N(t)dt$$

et par Fubibni-Tonelli

$$||\sigma_N(f)||_p^p\leq||f||_p^p\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}K_N(t)dt=||f||_p^p$$

De même

$$||f-\sigma_N(f)||_p^p\leq\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}K_N(t)g(t)dt=\sigma_N(g)(0)$$

où $g:t\to||f-\tau_tf||_p^p$ est continue. Ainsi par ce qui précede $||\sigma_N(f)-f||\to g(0)=0$