théorème. *Soit $f : E \to E$ k-contractante et (E, d) complet, alors f admet un unique point.*

Démonstration. *Soit a,b deux points fixes de f, alors*

$$\begin{aligned} d(f(a), f(b)) &\leq kd(a, b) \\ d(a, b) &\leq kd(a, b) \end{aligned}$$

or $k < 1$ donc $d(a, b) = 0$ et donc $a = b$.

Soit $x_0 \in E$, $x_{n+1} = f(x_n)$. Alors par $d(x_{n+1}, x_n) \leq k^n d(x_1, x_0)$. En effet par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$. L'égalité est trivialement vérifié pour x_0. Supposons l'égalitée vraie au rang n.

$$\begin{aligned} d(x_{n+2}, x_{n+1}) &= d(f(x_{n+1}), f(x_n)) \\ &\leq kd(x_{n+1}, x_n) \\ &\leq k^{n+1} d(x_1, x_0) \end{aligned}$$

Ce qui achève la récurrence. $\sum_{n \in \mathbb{N}} k^n$ converge car $k < 1$ donc soit $p \in \mathbb{N}$, $q > p$. Par inégalité triangulaire :

$$d(x_p, x_q) \leq \sum_{n=p}^{q-1} d(x_{n+1,x_n}) \leq d(x_1, x_0) \sum_{n=p}^{q-1} k^n \leq d(x_1, x_0) \sum_{n=p}^{\infty} k^n$$

Comme la série est convergente, pour tout $\varepsilon > 0$ il xiste $p_0 \in \mathbb{N}$ tel que $d(x_1, x_0) \sum_{n=p}^{\infty} k^n < \varepsilon$ et donc pour tout $p, q \geq p_0$, $q > p$ $d(x_p, x_q) < \varepsilon$ donc (x_n) est de Cauchy dans E complet, (x_n) converge vers $x \in E$.

Par la continuité de f on a $x = f(x)$

corollaire. *Soit (E,d) complet, $f : E \to E$. supposons qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que f^p soit contractante, alors f admet un unique point fixe.*

Démonstration. *Comme f^p est contractante elle admet un unique point fixe $x \in E$.*

$$f^p(f(x)) = f(f^p(x)) = f(x)$$

Donc $f(x)$ est un point fixe de f or par unicité du point fixe, $f(x) = x$. Soit a un auter point fixe de f, alors $f^p(a) = a$ donc $a = x$

Lemme. *Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle, $\omega \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$ et $v \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$. On suppose $\forall t \in I$, $\omega'(t) \leq v(x)\omega(t)$ Alors avec $t_0 \in I$*

$\forall t \in I, t \geq t_0,\ \omega(t) \leq \omega(t_0) e^{\int_{t_0}^t v(s)ds}$

Démonstration. *On a*

$$\left(\omega(t) e^{-\int_{t_0}^t v(s)ds}\right)' = (\omega'(t) - v(t)\omega(t)) e^{-\int_{t_0}^t v(s)ds} \leq 0$$

donc $t \to \omega(t) e^{-\int_{t_0}^t v(s)ds}$ est décroissante. En particulier avec $t_0 \in I$, $\forall t \in I, t \geq t_0,\ \omega(t) e^{-\int_{t_0}^t v(s)ds} \leq \omega(t_0)$ d'où l'inégalité.

On obtient de plus $\forall t \in I, t \leq t_0,\ \omega(t) \geq \omega(t_0) e^{\int_{t_0}^t v(s)ds}$

Lemme. *Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle, u et $v \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$, $a \in \mathbb{R}$, $t_0 \in I$.*

On suppose $v \geq 0$, $\forall t \in I, t \geq t_0,\ u(t) \leq a + \int_{t_0}^t v(s)u(s)ds$.

Alors $\forall t \in I, t \geq t_0,\ u(t) \leq a e^{\int_{t_0}^t v(s)ds}$

Démonstration. *Pour $t \in I$, $t \geq t_0$ on pose $\omega(t) = a + \int_{t_0}^t v(s)u(s)ds$. On a $\omega'(t) = v(t)u(t)$.*

Par hypothèse on a pour tout $t \in I$, $t \geq t_0$ et comme $v \geq 0$:

$$\begin{aligned} u(t) &\leq \omega(t) \\ v(t)u(t) &\leq v(t)\omega(t) \\ \omega'(t) &\leq v(t)\omega(t) \end{aligned}$$

Par le lemme précédent, $\forall t \in I$, $t \geq t_0$, $\omega(t) \leq \omega(t_0) e^{\int_{t_0}^t v(s)ds} = a e^{\int_{t_0}^t v(s)ds}$
d'où $u(t) \leq a e^{\int_{t_0}^t v(s)ds}$

Lemme. *Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle, u et $v \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$, $a \in \mathbb{R}_+$, $t_0 \in I$.*

On suppose u et $v \geq 0$, $\forall t \in I, t \geq t_0$, $u(t) \leq a + |\int_{t_0}^t v(s)u(s)ds|$.

Alors $\forall t \in I, t \geq t_0$, $u(t) \leq ae^{|\int_{t_0}^t v(s)ds|}$

Démonstration. *Soit $t \geq t_0$,comme $u, v \geq 0$ on se trouve sous les hypothèse du lemme précédent donc $u(t) \leq ae^{\int_{t_0}^t v(s)ds}$*

Si $t \leq t_0$ on pose $\omega(t) = a - \int_{t_0}^t v(s)u(s)ds$. Alors $\omega'(t) = -u(t)v(t) \geq -v(t)\omega(t)$ d'où

$$\left(\omega(t)e^{\int_{t_0}^t v(s)ds}\right)' = (\omega'(t) + \omega(t)v(t))e^{\int_{t_0}^t v(s)ds} \geq 0$$

donc ${}^t \to \omega(t)e^{\int_{t_0}^t v(s)ds}$ est croissante et donc $\omega(t)e^{\int_{t_0}^t v(s)ds} \leq \omega(t_0) = a$

Finalement, $u(t) \leq \omega(t) \leq ae^{-\int_{t_0}^t v(s)ds} = ae^{|\int_{t_0}^t v(s)ds|}$

théorème. *Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle, $A \in \mathcal{C}(I, M_n(\mathbb{K}))$, $B \in \mathcal{C}(I, \mathbb{K}^N)$, $t_0, x_0) \in I \times \mathbb{K}^N$ alors il existe une unique solution $y : I \to \mathbb{K}^N$ au problème de Cauchy :*

$$\left\{ \begin{array}{ccc} y' & = & A(t)y(t) + B(t) \\ y(t_0) & = & x_0 \end{array} \right.$$

Démonstration. *Voyons l'unicité par les lemmes de Gronwall. Soient y, z deux solutions au problème de Cauchy. Par la formulation intégrale du problème on ecrit*

$$y(t) = x_0 + \int_{t_0}^t A(s)y(s) + B(s)ds$$
$$z(t) = x_0 + \int_{t_0}^t A(s)z(s) + B(s)ds$$
$$y(t) - z(t) = \int_{t_0}^t A(s)(y(s) - z(s))ds$$

Ainsi pour tout $t \in I$, $t \geq t_0$, $||t(t) - z(t)|| \leq \int_{t_0}^t |||A(s)|||\ ||y(s) - z(s)||ds$

et pour tout $t \leq t_0$, $||t(t) - z(t)|| \leq \int_t^{t_0} |||A(s)|||\ ||y(s) - z(s)||$ Donc par le lemme de Gronwall avec $u(t) = ||y(t) - z(t)||$, $a = 0$ et $v(t) = |||A(t)|||$ on a $||y(t) - z(t)|| = 0$ donc y=z

Voyons l'existence.

Supposons d'abord $I \subset \mathbb{R}$ compact. Alors il existe α, $\beta \geq 0$ tel que $I = [t_0 - \alpha, t_0 + \beta]$. On pose $E = \mathcal{C}(I, \mathbb{K}^N)$ munit de la norme $|| \cdot ||_\infty$. E munit de cette norme est commplet. On pose

$$\begin{array}{cccc} \Phi & : & E & \to & E \\ & & f & \to & x_0 + \int_{t_0}^t A(s)f(s) + B(s)ds \end{array}$$

Pour $y \in E$, $t \to A(t)y(t) + B(t)$ est continue de I dans $\mathbb{K}^N$ donc $\Phi(y) \in E$. On pose $k = sup_{t \in I}|||A(t)|||$ qui est fini car I est compact et A et la norme matricielle sont continues. Voyons par récurrence sur $p \in \mathbb{N}$ que pour tout y, $\tilde{y} \in E$

$$||\Phi^p(y)(t) - \Phi^p(\tilde{y})(t)|| \leq k^p \frac{|t - t_0|^p}{p!} ||y(t) - \tilde{y}(t)||$$

En effet

$$||\Phi^0(y)(t) - \Phi^0(\tilde{y})(t)|| = ||y(t) - \tilde{y}(t)|| \leq k^0 \frac{|t - t_0|^0}{0!} ||y - \tilde{y}||_\infty$$

Supposons l'égalité vraie au rang p

si $t \geq t_0$

$$\begin{aligned}||\Phi^{p+1}(y)(t)-\Phi^{p+1}(\tilde{y})(t)|| &= ||\int_{t_0}^{t} A(s)(\Phi^p(y)(s)-\Phi^p(\tilde{y})(s))ds|| \\ &\leq \int_{t_0}^{t} |||A(s)|||\ ||(\Phi^p(y)(s)-\Phi^p(\tilde{y})(s))||ds \\ &\leq k\int_{t_0}^{t} k^p\frac{(s-t_0)^p}{p!}||y-\tilde{y}||_\infty ds \\ &\leq k^{p+1}\frac{(t-t_0)^{p+1}}{(p+1)!}||y-\tilde{y}||_\infty\end{aligned}$$

si $t \leq t_0$

$$\begin{aligned}||\Phi^{p+1}(y)(t)-\Phi^{p+1}(\tilde{y})(t)|| &= ||\int_{t_0}^{t} A(s)(\Phi^p(y)(s)-\Phi^p(\tilde{y})(s))ds|| \\ &\leq \int_{t_0}^{t} |||A(s)|||\ ||(\Phi^p(y)(s)-\Phi^p(\tilde{y})(s))||ds \\ &\leq k\int_{t_0}^{t} k^p\frac{(t_0-s)^p}{p!}||y-\tilde{y}||_\infty ds \\ &\leq k^{p+1}\frac{(t_0-t)^{p+1}}{(p+1)!}||y-\tilde{y}||_\infty\end{aligned}$$

d'où pour tout $t \in I$,

$$||\Phi^{p+1}(y)(t)-\Phi^{p+1}(\tilde{y})(t)|| \leq k^{p+1}\frac{|t-t_0|^{p+1}}{(p+1)!}||y-\tilde{y}||_\infty$$

Ce qui achève la récurrence. On pose $\gamma = max(\alpha,\ \beta)$, *On a pour tout* $p \in \mathbb{N}$

$$||\Phi^p(y)(t)-\Phi^p(\tilde{y})(t)|| \leq k^p\frac{\gamma^p}{(p)!}||y-\tilde{y}||_\infty$$

Comme $\sum_{\mathbb{N}} \frac{k^p\gamma^p}{p!} = e^{k\gamma}$, $lim_{p\to\infty}\frac{k^p\gamma^p}{p!} = 0$ *donc il existe* $p_0 \in \mathbb{N}$ *tel que* $\frac{k^{p_0}\gamma^{p_0}}{p_0!} < 1$ *et alors* Φ^{p_0} *est contractante sur* E *qui est complet. Elle admet donc un unique point fixe* $y \in E$ *qui vérifie*

$$y(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} A(s)y(s) + B(s)ds$$

. y *est solution du problème de Cauchy sur* $[t_0-\alpha, t_0+\beta]$.

Si I *est quelconque, on construit une solution sur* I *en posant pour* $t \in I$ $y(t) = y_J(t)$ *où* $J \subset I$ *est un intervalle compact qui contient* t *et* t_0. *Soient* $J,\ J' \subset I$ *deux intervalles compacts contenant* t *et* t_0, *alors* $J \cap J'$ *est un intervalle compact qui contient* t *et* t_0. *Par l'unicité de la solution au problème de Cauchy sur* $J \cap J'$, *on a* $y_J(t) = y_{J'}(t)$ *donc la solution* y *est bien posé.*