Lemme. *Soient A, B, C trois points non-alignés du plan eucliden. Alors la fonction $f : M \to AM + BM + CM$ est coercive, strictement convexe sur $\mathbb{R}^2$ et différentiable sur $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{A, B, C\}$. Son gradient s'écrit $\Delta f(M) = \frac{\vec{AM}}{AM} + \frac{\vec{BM}}{BM} + \frac{\vec{CM}}{CM}$*

Démonstration. *Voyons d'abord que f est coercive. Par inégalité tirangulaire ; pour tout $M \in \mathbb{R}^2$ on a*

$$\begin{aligned} OM - OA &\leq MA \\ (OM - OA) + (OM - OB) + (OM - OC) &\leq f(M) \\ 3OM - (OA + OB + OC) &\leq f(M) \\ 3OM - f(O) &\leq f(M) \end{aligned}$$

Donc $f(M) \to \infty$ quand $||M|| \to \infty$, f est coercive. Voyons que f est strictement convexe. Soient $M, N \in \mathbb{R}^2$ et $t \in]0, 1[$. En notant a, b, c, m, n les coordonnées des points A, B, C, M, N on a par inégalité trianglaire

$$\begin{aligned} f(tM + (1-t)N) &= |a - tm - (1-t)n| + |b - tm - (1-t)n| + |c - tm - (1-t)n| \\ &= |t(a-m) - (1-t)(n-a)| + |t(b-m) - (1-t)(n-b)| + |t(c-m) - (1-t)(n-c)| \\ &\leq |t(a-m)| + (1-t)|n-a| + |t(b-m)| + (1-t)|n-b| + |t(c-m)| + (1-t)|n-c| \\ &\leq tf(M) + (1-t)f(N) \end{aligned}$$

Avec égalité si et seulement si les couples $(\vec{AM}, \vec{AN})$, $(\vec{BM}, \vec{BN})$, $(\vec{CM}, \vec{CN})$ sont positivement corélés. Mais alors pour $M \neq N$ on aurait A, B, C aligné sur (MN) ce qui est impossible par hypothèse. L'égalité n'arrive donc jamais donc f est strictement convexe sur $\mathbb{R}^2$ f est somme de fonction différentiable sur U donc différentiable. Soient $M, N \in U$ On a

$$\begin{aligned} AN^2 &= \langle \vec{AN}, \vec{AN} \rangle \\ &= \langle \vec{AM} + \vec{MN}, \vec{AM} + \vec{MN} \rangle \\ &= AM^2 + 2\langle \vec{AM}, \vec{MN} \rangle + MN^2 \\ &= AM^2 \left(1 - 2 \left\langle \frac{\vec{AM}}{AM^2}, \vec{MN} \right\rangle + o(MN) \right) \end{aligned}$$

Comme $x \to \sqrt{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^2$, on a en composant par $\sqrt{}$ puis avec son DL

$$AN = AM \left(1 - \left\langle \frac{\vec{AM}}{AM^2}, \vec{MN} \right\rangle + o(MN) \right) = AM - \left\langle \frac{\vec{AM}}{AM}, \vec{MN} \right\rangle + o(MN)$$

Par les mêmes calculs avec B et C on obtient finalement

$$f(M + N) = f(M) - \left\langle \frac{\vec{AM}}{AM} + \frac{\vec{BM}}{BM} + \frac{\vec{CM}}{CM}, \vec{MN} \right\rangle + o(MN)$$

d'ou l'expression du gradient.

théorème. *Soient A, B, C trois points non-alignés du plan euclidien. On suppose les angles du triangles ABC strictements inférieurs à $\frac{2\pi}{3}$. Alors f admet un minimum strict en $P \notin \{A, B, C\}$ et $\widehat{APB} = \widehat{BPC} = \widehat{CPA} = \frac{2\pi}{3}$*

Démonstration. *Par le lemme précédent comme f est coercive et strictement convexe elle admet un unique minimum. De plus comme f est différenciable sur U elle admet son minimum soit en un point critique soit en A, B ou C.*

Voyons que le minimum n'est pas atteint en A, B ou C. on note $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$ les angles du triangle ABC. leur somme vaut π donc au moins deux angle sont strictement inférieur à $\frac{\pi}{2}$. supposons sans perte de généralité *que ce sont $\hat{B}$ et $\hat{C}$. Soit H le projeté orthogonal de A sur (BC) de sorte que AH soit la hauteur issue de A. Comme $\hat{B},\ \hat{C} < \frac{\pi}{2}$ $H \in]B, C[$ donc comme BA est l'hypothénuse de ABH*

$$\begin{aligned} f(H) &= AH + BH + CH \\ &= AH + BC \\ &< BA + BC \\ &< f(B) \end{aligned}$$

Par le même raisonnement $f(H) < f(C)$ donc B et C ne peuvent pas être le minimum de f. Si $\hat{A} < \frac{\pi}{2}$ alors encore par le même raisonnement A ne peut pas être le minimum de f donc $\frac{\pi}{2} \leq \hat{A} < \frac{2\pi}{3}$

On considère la bissectrice de $\hat{A}$ dont on note l'angle α. Soit M sur cette bissectrice. Alors

$$MB^2 = AB^2 + AM^2 - 2AB \times AM \times cos(\alpha)$$

En utilisant le DL de $\sqrt{}$ il vient

$$MB = AB\sqrt{1 + \frac{AM^2}{AB^2} - 2\frac{AM}{AB}cos(\alpha)} = AB - AMcos(\alpha) + o(AM)$$

De même on trouve $MC = AC - AMcos(\alpha) + o(AM)$ et donc $f(M) = f(A) + (1 - 2cos(\alpha))AM + o(AM)$ Or comme $0 < \alpha < \frac{\pi}{3}$ $1 - 2cos(\alpha) < 0$ donc pour M suffisamment proche de A sur la bissectrice on a $f(M) < f(A)$ et A n'est donc pas le minimum de f. Le minimum de f est donc forcément atteint en un point critique de f dans U

Etudions les points critique de f. Soit $P \in U$ tel que $\Delta f(P) = 0$. Cherchons $\overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v},\ \overrightarrow{w}$ unitaires tels que $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} + \overrightarrow{w} = 0$. Alors $-\overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$

$$1 = \langle \overrightarrow{w}, \overrightarrow{w} \rangle = \langle \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}, \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} \rangle = 1 + 2\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle + 1 = 2(1 + \langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle)$$

Ainsi $\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle = -\frac{1}{2}$. En notant β l'angle formé par $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ On a $cos(\beta) = -\frac{1}{2}$ donc $\beta = \frac{2\pi}{3}$. Comme les vecteurs jouent des rôles symmétrique on en déduit le meme résultats pour les autres angles. Le point P définit par $\frac{\overrightarrow{AP}}{AP} = \overrightarrow{u},\ \frac{\overrightarrow{BP}}{BP} = \overrightarrow{v},\ \frac{\overrightarrow{CP}}{CP} = \overrightarrow{w}$ est donc l'unique point critique de f. Le minimum de f est donc atteint en ce point et on a les égalité énoncés sur les angles.