Lemme. *Soit X une variable aléatoire réell, centrée et bornée par 1 presque surement ? Alors*

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^*,\ \mathbb{E}(exp(tX)) \leq exp\left(\frac{t^2}{2}\right)$$

Démonstration. *Par converxité de exp : pour $x \in [-1,1]$, pour tout $t \in \mathbb{R}$,*
$exp(tx) \leq \frac{1-x}{2}exp(-t) + \frac{1+x}{2}exp(t)$. tX est bornée p.s. donc $exp(tX)$ est bornée donc intégrable.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(exp(tX)) &\leq \frac{1}{2}(\mathbb{E}[(1-X)exp(-t)] + \mathbb{E}[(1+X)exp(t)]) \\ &\leq \frac{1}{2}(e^{-t} + e^{t}) = cosh(t)\end{aligned}$$

or $2^k k! \leq (2k)!$ donc

$$cosh(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k}}{(2k)!} \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k}}{2^k k!} = exp\left(\frac{t^2}{2}\right)$$

théorème. *Soit (X_n) une suite de v.a réelles, indépendentes, centrées et bornée p.s. (c_n) telle que $|X_n| \leq c_n$ alors*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \varepsilon > 0,\ \mathbb{P}(|S_n| \geq \varepsilon) \leq 2exp\left(-\frac{\varepsilon^2}{2\sum_{k=1}^{n} c_k^2}\right)$$

Démonstration. *Soient $n \in \mathbb{N},\ t > 0,\ \frac{x_n}{c_n}$ est centrée bornée par 1 p.s. donc $\mathbb{E}[exp(tc_n\frac{X}{c_n})] \leq exp\left(\frac{(tc_n)^2}{2}\right)$ d'ou*

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[exp(tS_n)] &= \prod_{k=1}^{n} \mathbb{E}[exp(tX_k)] \\ &\leq \prod_{k=1}^{n} exp\left(\frac{(tc_k)^2}{2}\right) \\ &\leq exp\left(\frac{t^2}{2}\sum_{k=1}^{n} c_k^2\right)\end{aligned}$$

par la croissnce stricte de exp, $\{S_n > \varepsilon\} = \{exp(tS_n) > exp(\varepsilon)\}$. Par Markov on trouve

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(S_n > \varepsilon) &= \mathbb{P}(exp(tS_n) > exp(\varepsilon)) \\ &\leq \frac{\mathbb{E}[exp(tS_n)]}{exp(t\varepsilon)} \\ &\leq exp\left(\frac{t^2}{2}\sum_{k=1}^{n} c_k^2 - t\varepsilon\right)\end{aligned}$$

En posant $a = \sum_{k=1}^{n} c_k^2$, la fonction $t \to a\frac{t^2}{2} - t\varepsilon$ atteint son minimum en $t = \frac{\varepsilon}{a} > 0$ donc par croissance de l'exponentielle :

$$\mathbb{P}(S_n > \varepsilon) \leq exp\left(-\frac{\varepsilon^2}{2\sum_{k=1}^{n} c_k^2}\right)$$

On trouve la même majroration pour $\mathbb{P}(-S_n > \varepsilon)$ d'où

$$\mathbb{P}|S_n| > \varepsilon) \leq 2exp\left(-\frac{\varepsilon^2}{2\sum_{k=1}^{n} c_k^2}\right)$$

théorème. *Soit (X_n) suite de v.a. i.i.d. de loi $\mathcal{B}(p)$ et $\alpha \in]0,1[$. Alors un intervalle de confiance de niveau $1-\alpha$ du parametre p est*

$$I_{1-\alpha} = \left[\frac{1}{n}S_n - \sqrt{\frac{2}{n}ln\left(\frac{2}{\alpha}\right)}, \frac{1}{n}S_n + \sqrt{\frac{2}{n}ln\left(\frac{2}{\alpha}\right)}\right]$$

Démonstration. *Par l'inégalité de Hoeffding appliquée a* $(X_n - p)$,

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{n}S_n - p\right| > \varepsilon\right) = \mathbb{P}(|S_n - p| > n\varepsilon) \leq exp\left(-\frac{n^2\varepsilon^2}{2n}\right)$$

En posant $\varepsilon = \sqrt{\frac{2}{n}ln\left(\frac{2}{\alpha}\right)}$ *alors* $\alpha = 2exp\left(-\frac{n\varepsilon^2}{2}\right)$ *d'où*

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{n}S_n - p\right| < \varepsilon\right) = 1 - \mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{n}S_n - p\right| > \varepsilon\right) \geq 1 - \alpha$$

théorème.