théorème. *$s \to \zeta(s)$ est bien définie et continue sur $D = \{s \in \mathbb{C} |\ Re(s) > 1\}$*

Démonstration. *pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $s \to \frac{1}{n^s}$ est continue sur $\mathbb{C}$. Soit $K \subset D$ un compact. On note $\alpha = \underset{s\in K}{inf} Re(s) > 1$. On a alors pour tout $s \in K$ en notant $s = a+ib$, $|n^s| = |n^{a+ib}| = |n^a e^{ibln(n)}| = n^a \geq n^\alpha$. On a donc pour $N \in \mathbb{N}^*$*

$$\sum_{n=1}^{N} \left| \frac{1}{n^s} \right| \leq \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^\alpha}$$

Comme $\alpha > 1$ la série de droite converge donc $\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^s}$ converge normalement sur K. Ainsi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ converge uniformément sur tout compact de D donc $s \to \zeta(s)$ est bien définie et continue sur D

théorème. *Soit p_k le k-ème nombre premier. alors pour tout $s \in D$*

$$\zeta(s) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1 - p_k^{-s}}$$

Démonstration. *On considère l'espace mesurable $(\mathbb{N}^*, \mathcal{P}(\mathbb{N}^*))$ que l'on muni de la mesure de probabilité μ_s définit par : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mu_s(\{n\}) = \frac{1}{\zeta(s)n^s}$.*

Pour $p \in \mathbb{N}^*$ On a

$$\begin{aligned}
\mu_s(p\mathbb{N}^*) &= \mu_s(\bigsqcup_{n=1}^{\infty} \{pn\}) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \mu_s(\{pn\}) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\zeta(s)(pn)^s} \\
&= \frac{1}{p^s}
\end{aligned}$$

On note pour $i \in \mathbb{N}$, $A_i = p_i\mathbb{N}^* = \{n \in \mathbb{N}^* |\ p_i|n\}$ et $B_i = \bigcap_{k=1}^{i} A_k^c$ On a $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k^c = \{1\}$. Par le théorème de continuité decroisante, $\lim_{n\to\infty} \mu_s(B_n) = \mu_s(\bigcap_{n=0}^{\infty} B_n) = \mu_s(\{1\}) = \frac{1}{\zeta(s)}$.

Comme les p_i sont premiers et donc premiers entre eux, on a pour tout $I \subset \mathbb{N}$ fini

$$\bigcap_{i\in I} A_i = \bigcap_{i\in I} p_i\mathbb{N}^* = (\prod_{i\in I} p_i)\mathbb{N}^*$$

En effet si clairement $(\prod_{i\in I} p_i)\mathbb{N}^* \subset \bigcap_{i\in I} p_i\mathbb{N}^*$. D'autre part soit $n \in \bigcap_{i\in I} p_i\mathbb{N}^*$ On numérote les éléments de $I = \{i_1, ..., i_m\}$, alors $n = k_1 p_{i_1}$, $p_{i_2}|n = k_1 p_{i_1}$ comme p_{i_1}, p_{i_2} premiers entre eux, $p_{i_2}|k_1$ donc $k_1 = k_2 p_2$, $n = k_2 p_{i_1} p_{i_2}$. Supposons par reccurence qu'on a déja établit que $n = k_j p_{i_1}...p_{i_j}$. $p_{i_{j+1}}|n = k_j p_{i_1}...p_{i_j}$ comme $p_{i_1}, ..., p_{i_{j+1}}$ deux à deux premiers entre eux, $p_{i_{j+1}}|k_j$ donc $k_j = k_{j+1}p_{i_{j+1}}$, $n = k_{j+1}p_{i_1}...p_{i_{j+1}}$. On a ainsi par recurrence sur $1 \leq j \leq m$ que $n = kp_{i_1}...p_{i_m} \in (\prod_{i\in I} p_i)\mathbb{N}^*$ d'où $\bigcap_{i\in I} p_i\mathbb{N}^* \subset (\prod_{i\in I} p_i)\mathbb{N}^*$ et donc l'égalité des ensembles. Ainsi pour tout $I \subset \mathbb{N}$ fini,

$$\mu_s(\bigcap_{i\in I} A_i) = \mu_s((\prod_{i\in I} p_i)\mathbb{N}^*) = \frac{1}{(\prod_{i\in I} p_i)^s} = \prod_{i\in I} \frac{1}{p_i^s} = \prod_{i\in I} \mu_s(p_i\mathbb{N}^*) = \prod_{i\in I} \mu_s(A_i)$$

Les $(A_i)_{i\in I}$ sont indépendants, donc les $(A_i^c)_{i\in I}$ aussi. On en conclu pour $N \in \mathbb{N}$

$$\prod_{i=0}^{N} (1 - p_i^{-s}) = \prod_{i=0}^{N} (1 - \mu_s(A_i)) = \prod_{i=0}^{N} (\mu_s(A_i^c)) = \mu_s(\bigcap_{i=0}^{N} A_i^c)$$

En faisant tendre N vers l'infini il vient :

$$\prod_{i=0}^{\infty} (1 - p_i^{-s}) = \mu_s(\bigcap_{i=0}^{\infty} A_i^c) = \frac{1}{\zeta(s)}$$

théorème. *la somme* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p_n}$ *diverge*

Démonstration. *Voyons que* $\zeta(s) \underset{s\to 1^+}{\sim} \frac{1}{s-1}$ *Par décroissance de* $x \to \frac{1}{x}$ *on a pour tout* $n \in \mathbb{N}$, *et* $s > 1$,

$$\frac{1}{(n+1^s)} \leq \int_n^{n+1} \frac{1}{t^s} ds \leq \frac{1}{n^s}$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1^s)} \leq \int_1^{\infty} \frac{1}{t^s} ds \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$
$$\zeta(s) - 1 \leq \frac{1}{s-1} \leq \zeta(s)$$
$$\frac{1}{s-1} \leq \zeta(s) \leq \frac{1}{s-1} + 1$$
$$1 \leq (s-1)\zeta(s) \leq s$$

pr le théorème d'encadrement, $(s-1)\zeta(s) \underset{s\to 1^+}{\to} 1$, $\zeta(s) \underset{s\to 1^+}{\sim} \frac{1}{s-1}$

on a $ln\left(\left(1 - \frac{1}{p_n}\right)^{-1}\right) \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{p_n}$ *d'ou pour* $N \in \mathbb{N}^*$

$$ln\left(\prod_{n=1}^{N} \left(1 - \frac{1}{p_n}\right)^{-1}\right) = \sum_{n=1}^{N} ln\left(\left(1 - \frac{1}{p_n}\right)^{-1}\right)$$

qui est de même nature que $\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{p_n}$ *donc admet une limite* l. *Par continuité de l'exponentielle,* $\prod_{n\in\mathbb{N}^*} \left(1 - \frac{1}{p_n}\right)^{-1} = e^l < \infty$ *et donc* $\zeta(s)$ *est majoré. ce qui est absurde car* $\zeta(s) \underset{s\to 1^+}{\sim} \frac{1}{s-1}$ *donc la somme diverge.*