Lemme. *Soit F un sous-espace vectoriel de E*

1. $dim(F) + dim(F^\perp) \geq dim(E)$ *avec égalité si q est non-dégénérée.*
2. $E = F \oplus F^\perp$ *ssi $q_{|F}$ est non-dégénérée.*

Démonstration. 1. *Si $F = \{0\}$ alors alors $F^\perp = E$ et l'inégalité est bien vérifiée. Sinon soit $(e_1, ..., e_s)$ une base de F. On pose $l_i = \phi(\cdot, e_i)$ où ϕ est la forme polaire de q. Posons $f = (l_1, ..., l_s)$. On a $F^\perp = \{x \in E|\ \forall y \in F,\ \phi(x, y) = 0\} = \{x \in E|\ \forall y \in \{1, ..., s\},\ \phi(x, e_i) = 0\} = \cap_{i=1}^s ker\ l_i = ker(f)$*
Ainsi d'après le théorème du rang, $dim(F^\perp) = dim(ker\ f) = dim(E) - rg(f) \geq dim(E) - s = dim(E) - dim(F)$ avec égalité si et seulement si $l_1, ..., l_s$ est libre. Supposons q non dégénérée, en particulier $q_{|F}$ l'est. Alors $(l_1, ..., l_s)$ est libre. En effet soient $\lambda_1, ..., \lambda_s \in \mathbb{K}$ tel que $\lambda_1 l_1 + ... + \lambda_s l_s = 0$. Alors pour tout $x \in F$, $0 = \lambda_1 l_1(x) + ... + \lambda_s l_(x) = \phi(x, \sum \lambda_i e_i)$ donc $\sum \lambda_i e_i \in F^\perp$ mais $\sum \lambda_i e_i \in F$ donc comme $q_{|F}$ est non dégénérée, $\sum \lambda_i e_i = 0$ et comme $(e_i, ..., e_s)$ est libre, $\lambda_1 = ... = \lambda_s = 0$. Donc $(l_1, ..., l_s)$ est libre et donc on à égalité.
2. *Supposons $q_{|F}$ non-dégénérée. Necesairement $F \neq \{0\}$ et d'après le calcul précédent, $(l_1, ..., l_s)$ est libre. La démonstation précédent et le fait que $F \cap F^\perp = \{0\}$ montre que $E = F \oplus F^\perp$.*
Si $E = F \oplus F^\perp$ alos $F \cap F^\perp = \{0\}$ et donc $q_{|F}$ est non-dégénérée.

théorème. *Il existe un unique couple $(s, t) \in \mathbb{N}^2$ tel que pour toute base q-orthogonale $(e_1, ..., e_n)$, on a*

$$s = card\{i \in \{1, ..., n\}|\ q(ei) > 0\},\ t = card\{i \in \{1, ..., n\}|\ q(ei) < 0\}$$

En particulier $s + t = rg(q)$. On appèle ce couple la signature de q

Démonstration. *Soit $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$ et $\mathcal{B}' = (e'_1, ..., e'_n)$ deux bases q-orthogonales de E. Quitte a permuter $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ on peut supposer*

$$Mat_{\mathcal{B}}(q) = \begin{pmatrix} (>0)_s & 0 & 0 \\ 0 & (<0)_t & 0 \\ 0 & 0 & (0)_{n-s-t} \end{pmatrix},\ Mat_{\mathcal{B}'}(q) = \begin{pmatrix} (>0)_{s'} & 0 & 0 \\ 0 & (<0)_{t'} & 0 \\ 0 & 0 & (0)_{n-s'-t'} \end{pmatrix}$$

Voyons $s = s',\ t = t'$. Comme $s + t = s' + t' = rg(q)$ il suffit de monter $s = s'$. Posons $F = Vect(e_1, ..., e_s)$ et $G = Vect(e'_{+1}, ..., e'_n)$. Si $s \geq 1$ alors $F \neq \{0\}$ et pour tout $x = \sum x_i e_i \in F \setminus \{0\}$, $q(x) = \sum q(e_i) x_i^2 > 0$. De même si $s' < n$ alors pour tout $x \in G$, $q(x) < 0$. En particulier $F \cap G = \{0\}$. Si $s = 0$ ou $s' = n$ on a toujour $sF \cap G = \{0\}$. De là, $n \geq dim(F \oplus G) = dim(F) + dim(G) = s + n - s'$ donc $s' \geq s$. Comme $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ et donc s et s' jouent des rolent symétrique on en déduit $s = s'$

théorème. *Notons $\mathcal{P}$ (respectivement $\mathcal{N}$) l'ensemble des sous-espaces de E sur lesquels la restriction de q est définie positive (respectivement définie négative). Alors $s = max_{E^+ \in \mathcal{P}}(dim(E^+)$ et $t = max_{E^- \in \mathcal{N}}(dim(E^-)$ avec $max(\emptyset) = 0$*

Démonstration. *Posons $s' = max_{E^+ \in \mathcal{P}}(dim(E^+)$ et $t' = max_{E^- \in \mathcal{N}}(dim(E^-)$. Par définition de s et t, $s \leq s'$ et $t \leq t'$. Si $\mathcal{P} = \emptyset$ alors $s = s' = 0$. Supposons $\mathcal{P} \neq \emptyset$. Soit $F \in \mathcal{P}$ tel que $dim(F) = s'$. Soit $(e_1, ...e_{s'})$ une base $q-$orthogonale de F. que l'on complète en une base $q-$orthogonale $(e_1, ..., e_n)$ de E, ce qui est possible car $q_{|F}$ est définie donc non-dégénérée. Par le lemme on a donc $E = F \oplus F^\perp$. Par maximalité de F dans $\mathcal{P}$, $q(e_{s'+1}), ..., q(e_n) \leq 0$ donc par unicité de la signature $s = s'$. Par le même argument on trouve $t = t'$*