q une forme quadratique, ϕ la forme bilinéaire associée.

Lemme. *Soit q Une forme quadratique sur E et F un s.e.v. de dimension finie de E. Si $q_{|F}$ est définie alors $F \oplus F^{\perp} = E$*

Démonstration.
— *Si $x \in F \cap F^{\perp}$ alors $\phi(x,x) = q(x) = 0$ donc $x = 0$ car $q_{|F}$ est définie.*
— *Soit $(e_1, ..., e_s)$ Une base $q_{|F}$-orthogonale. Pour $x \in E$ on pose pou $i \in \{1, ..., s\}$, $\lambda_i = \frac{\phi(x,e_i)}{q(e_i)}$. $q(e_i) \neq 0$ car $q_{|F}$ est définie. $f = \sum_{i=1}^{s} \lambda_i e_i \in F$ On a alors pour tout $k \in \{1, ..., s\}$*

$$\begin{aligned}\phi(x-f, e_k) &= \phi(x, e_k) - \phi(f, e_k) \\ &= \phi(x, e_k) - \sum_{i=1}^{s} \lambda_i \phi(e_i, e_k) \\ &= \phi(x, e_k) - \lambda_k q(e_k) \\ &= 0\end{aligned}$$

Donc $x - f \in F^{\perp}$ et $x = (x - f) + f$

théorème. *$A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ si et seulement si $A \in S_n(\mathbb{R})$ et pour tout $k \in \{1, ..., n\}$, $det(A_k) > 0$ avec $A_k = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq k}$*

Démonstration.
— *Supposons $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$. On note q la forme quadratique qui admet A comme matrice dans la base B. q est définie positive.Soit $1 \leq k \leq n$, $E_k = Vect(e_1, ..., e_k)$. Alors $q_{|E_k}$ est définie positive donc de signature $(k, 0)$. D'après le théorème d'inertie de SYlvester, il existe $P \in Gl_k(\mathbb{R})$ tel que $Mat_{(e_1,...,e_k)}(q_{|E_k}) = ^T PI_kP$ donc $det(M_k) = det(P)^2 > 0$*
— *voyons la réciproque par récurrence sur n la taille de A Si $n = 1$ alors par hypothèse $A = det(A) > 0$. Supposons $n \in \mathbb{N}^*$ et que le résultat est vrai pour toute matrice comme dans l'énoncé de taille $< n$. Soit $A \in S_n(\mathbb{R})$ telle que pour tout $k \in \{1, ..., n\}$, $det(A_k) > 0$ avec $A_k = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq k}$. On note q la forme quadratique ayant A pou matrice dans la base canonique $\mathcal{B}$. $A_{n-1} \in S_{n-1}^{++}(\mathbb{R})$ par hypthèse de récurrence. Ainsi $q_{|E_{n-1}}$ est définie poitive et en particulier non-dégénérée. Par le lemme, $E_{n-1} \oplus E_{n-1}^{\perp} = E$ Or il existe $e \in E$ tel que $E_{n-1}^{\perp} = Vect(e)$. Ainsi*

$$M = Mat_{(e_1,...,e_{n-1},e)}(q) = \begin{pmatrix} A_{n-1} & 0 \\ 0 & q(e) \end{pmatrix}$$

et A est congrue à M donc il existe $Q \in Gl_n(\mathbb{R})$ telle que $M = ^T QAQ$. Comme $\det A > 0$, $det(M) > 0$ donc $q(e) = \frac{det(M)}{det(A_{n-1})} > 0$ Ainsi $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$

Application. $S = \left(\frac{1}{|i-j|+1}\right) \in S_n^{++}(\mathbb{R})$

Démonstration. *Soit* $M : \begin{array}{ccc} [0,1] & \to & M_n(\mathbb{R}) \\ t & \to & (t^{|i-j|})_{1 \leq i,j \leq n} \end{array}$ *Voyons que pour tout $t \in]0, 1[$, $M(t) \in S_n^{++}(\mathbb{R})$. Voyons pas récurrence que pour tout $1 \leq k \leq n$ $det(M_k(t)) > 0$*
— *Si $k = 1$, $det(M_1(t)) = 1 > 0$*
— *Supposons qu'il existe $1 \leq k \leq n-1$ tel que $det(M_k) > 0$*

$$det(M_{k+1}) = \begin{vmatrix} 1 & \dots & t^{k-1} & t^k \\ t & \dots & t^{k-2} & t^{k-1} \\ \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ t^k & \dots & t & 1 \end{vmatrix} \underset{c_{k+1} - tc_k \to c_{k+1}}{=} \begin{vmatrix} 1 & \dots & t^{k-1} & 0 \\ t & \dots & t^{k-2} & 0 \\ \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ t^k & \dots & t & 1-t^2 \end{vmatrix} = (1-t^2)det(M_k(t)) > 0$$

Soit $X \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Pour tout $0 < t < 1$ $^T XM(t)X > 0$ or l'application $t \to ^T XM(t)X$ est continue sur $[0, 1]$ et positive donc intégrable et d'intégrale strictement positive. Or

$$\int_0^1 {}^T XM(t)Xdt = ^T X \int_0^1 M(t)dtX = ^T XSX$$

Donc pour tout $X \neq 0$, $^T XSX > 0$ donc $S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$