Soit $u \in S(E)$ de matrice $A \in S_n(\mathbb{R})$ dans une b.o.n. $\mathcal{B}$

Lemme. *Pour tout $\lambda \in Sp(A)$, $\lambda \in \mathbb{R}$ et pour tout $\mu \in Sp(A) \setminus \{\lambda\}$, $E_\lambda \perp E_\mu$*

Démonstration. *Soient $\lambda, \mu \in Sp(A)$ telles que $\lambda \neq \mu$*

- *Soit $x \in E_\lambda \setminus \{0\}$ Alors $Ax = \lambda x$ donc ${}^T\overline{x}Ax = \lambda^T\overline{x}x$ Or A est symmétrique réelle donc ${}^T\overline{x}Ax =^T \overline{Ax\lambda}^T\overline{x}x$. Comme ${}^T\overline{x}x \neq 0$, $\overline{\lambda} = \lambda$ donc $\lambda \in \mathbb{R}$*
- *Soit $x \in E_\lambda$ et $y \in E_\mu$.*
$$\lambda\langle x|y\rangle = \langle \lambda x|y\rangle = \langle Ax|y\rangle = \langle x|Ay\rangle = \mu\langle x|y\rangle$$
Comme $\lambda \neq \mu$ $\langle x|y\rangle = 0$ et $E_\lambda \perp E_\mu$

Lemme. *Soit $\lambda \in Sp(A)$ et $e_1 \in E_\lambda$ de norme 1. Alors $(\mathbb{R}e_1)^\perp$ est stable par u*

Démonstration. *On note $H = (\mathbb{R}e_1)^\perp = ker\ \langle \cdot |e_1\rangle$ et $\langle \cdot |e_1\rangle \neq 0$ car $e_1 \neq 0$. H est donc un hyperplan. Soit $x \in H$,*
$$\langle u(x)|e_1\rangle = \langle x|u(e_1)\rangle = \lambda\langle x|e_1\rangle = 0$$
H est donc stable par u

théorème. — *u e diagonalise en une base orthonormée.*
- *Il existe $P \in O_n(\mathbb{R})$ tel que ${}^TPAP$ est diagonale.*

Démonstration. 1. *Par récurrence sur $n = dimE$*
- *Si $n = 1$, le résultat est trivial.*
- *Soit $n \in \mathbb{N}^*$ On suppose le résultat vrai pour tout endomorphisme symétrique d'un espace eucilidien de dimnsion $< n$. Soit $u \in S(E)$ et $\lambda_1 \in Sp(u)$. Soit $e_1 \in E_{\lambda_1}$ de norme 1. Alors $h = (\mathbb{R}e_1)^\perp$ est stable par u donc u induit un endomorphisme sur H de dimension $n-1$. En complétant (e_1) en une base $\mathcal{E} = (e_1, ..., e_n)$ de E, On obtient la matric de u dans cette base $Mat_\mathcal{E}(u) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ qui est symmétrique donc B est symmétrique. Par hypothèse de récurrence, il existe une b.o.n. $(f_2, ..., f_n)$ de H tel que la matrice de $u_{|H}$ dans cette base soit diagonale. Alors dans la base $(e_1, f_2, ..., f_n)$ la matrice de u est diagonale et cette bas est orthonormée.*

2. *Il suffit de remarque que la matrice de passage d'une b.o.n. à une autre est dans $O_n(\mathbb{R})$*

Application. *Soit q une forme quadratiqu su E, Il existe une b.o.n. d E qui soit $q-$orthogonale.*

Démonstration. *On pose $M = Mat_\mathcal{B}(q)$ est symétrique. Il exite donc $P \in O_n(\mathbb{R})$ tel que ${}^TPMP$ soit diagonale. Or P est la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à une autre b.o.n. $\mathcal{B}'$ et $Mat_{\mathcal{B}'}(q) =^T PMP$ est diagonale*

Application. *Soit $M \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ et $N \in S_n(\mathbb{R})$. Il existe $P \in O_n(\mathbb{R})$ tel que ${}^TPMP = I_n$ et ${}^TPNP$ soit diagonale.*

Démonstration. *Posons $q : X \in \mathbb{R}^n \to^T XMX$ la forme quadratique dont M soit la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$, $q' : X \in \mathbb{R}^n \to^T XNX$ la forme quadratique dont N soit la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Dans l'espace euclidien (E, q) il existe $\mathcal{B}_q$ une b.o.n. $q'-$orthogonale d'après le Corollaire 1. En posant $D = Mat_{\mathcal{B}_q}(q')$ et $P = Pass(\mathcal{B}, \mathcal{B}_q)$, Alors ${}^TPMP = I_n$ et ${}^TPNP = D$*