Lemme. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $a_1, ..., a_n \in \mathbb{C}$. On note $\omega = e^{2i\pi/n}$ et $P(x) = \sum_{k=1}^n a_k X^{k-1}$ et*

$$C(a_1, ..., a_n) = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_n & a_1 & \dots & a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_2 & a_3 & \dots & a_1 \end{pmatrix}$$

$det(C(a_1, ..., a_n)) = \prod_{k=1}^n P(\omega^k)$

Démonstration. *Posons $J = C(0, 1, 0, ..., 0)$ de sorte que $C(a_1, ..., a_n) = \sum_{k=1}^n a_k J^{k-1}$. Soit $Q(x) = X^n - 1$. Alors $Q(J) = 0$ donc J admet un polynome annulateur scindé à racine simple : $Q(x) = \prod_{k=0}^{n-1} X - \omega^k$. Les valeurs propres de J sont donc les (ω^k) et donc les valeurs propre de $C(a_1, ..., a_n) = P(J)$ sont les $(P(\omega^k))$. Comme le determinant de $C(a_1, ..., a_n)$ est le produit de ses valeurs propres, on en déduit le résultat.*

théorème. *Soit $P \subset \mathbb{C}$ un polygone dont les sommets ont pour affixes $z_1, ..., z_n$. On définit la suite de polygone (P_k) par $P_0 = P$ et P_{k+1} le polygone dont les sommets sont les centres des arrêtes de P_n. La suite P_k converge vers l'isobarycentre des sommets de P*

Démonstration. *On représente P_k par le vecteur colonne $Z_k =^T (z_1^{(k)}, ..., z_n^{(k)})$. En notant $g = \frac{1}{n}(z_1^{(0)} + ... + z_n^{(0)})$ l'affixe de l'isobarycentre de P, on veut montrer que Z_k tend vers $^T(g, ..., g)$ Pour $k \in \mathbb{N}$, Par définition de P_{k+1}, $Z_{k+1} =^T (\frac{z_1^{(k)} + z_2^{(k)}}{2}, ..., \frac{z_n^{(k)} + z_1^{(k)}}{2}) = AZ_k$ où $A = \frac{1}{2} I_n + \frac{1}{2} J$ avec J définit dans la preuve du lemme. Ainsi $Z_k = A^k Z_0$. L'étude de la converge de Z_k et donc ramenée àà l'etude de la convergence de A^k pour n'importe quelle norme car $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est de dimension finie.*

On a $\chi_A(X) = det(XI_n - A) = det((x - \frac{1}{2})J^0 - \frac{1}{2}J) = det(C(X - \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0, ..., 0))$. D'après le lemme, $\chi_A(x) = \prod_{k=1}^n (X - \frac{1}{2} - \frac{\omega^k}{2}) = \prod_{k=1}^n (X - \frac{1+\omega^k}{2})$. Ainsi les valeurs propres de A sont $(\frac{1+\omega^k}{2})$ et A est diagonalisable. Il existe donc $Q \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que $A = QDQ^{-1}$ avec $D = diag(1, \frac{1+\omega}{2}, ..., \frac{1+\omega^{n-1}}{2})$. Pour $1 \leq l \leq n-1$,

$$\left| \frac{1 + \omega^l}{2} \right| = \left| e^{il\pi/n} \frac{e^{-il\pi/n} + e^{il\pi/n}}{2} \right| = |cos(\pi l/n)| < 1$$

donc $(\frac{1+\omega^l}{2})^k \underset{k\to\infty}{\to} 0$. Ainsi $A^k \underset{k\to\infty}{\to} Diag(1, 0, ..., 0) = B$. Par continuité de la multiplcation matricielle, $Z_k \underset{l\to\infty}{\to} BZ_0 = G$ et $G = AG$. Ainsi $G \in ker\ A - I_n$ mais ce sous espace est de dimension 1 ca espace propre de A associé à la valeur propre 1. Comme $^T(1, ..., 1) \in ker\ (A - I_n)$, Il existe $a \in \mathbb{C}$ tel que $G =^T (a, ..., a)$ et P_k converge vers le point d'affixe a.

Finalmnt voyons que $a = g$, Pour tout $k \in \mathbb{N}$, l'isobarycentre de P_{k+1} a pour affixe

$$\frac{1}{n}(\frac{z_1^{(k)} + z_2^{(k)}}{2} + ... + \frac{z_n^{(k)} + z_1^{(k)}}{2}) = \frac{1}{n}(z_1^{(k)} + ... + z_n^{(k)})$$

Donc les P_k ont tousle même isobarycentre. Comme l'application $Z_k \to isobar(Z_k)$ st continue (car polynomiale en les coefficients de Z_k On en déduit $a = g$