théorème. *Soit* (A, ϕ) *un anneau euclidien de stathme* ϕ*. Soient* $m, n \in \mathbb{N}$ *et* $U \in \mathcal{M}_{m,n}(A)$*. Alors il existe une unique suite* $d_1, ..., d_s \in A \setminus \{0\}$ *(à des facteurs inversibles pres) telle que* $d_s | d_{s-1} | ... | d_1$ *et* U *est équivalente à* $D \in \mathcal{M}_{m,n}(A)$ *où* $D = diag(d_s, .., d_1, 0, ..., 0)$

Démonstration. *On va donner l'algorithme qui permet de trouver la suite* $d_1, ..., d_s$ *et les matrices de l'équivalence. On note* C_j *la j-ème colonne et* L_i *la i-ème ligne de* U*.*

1. *Si* $U = 0$*, l'algorithme est terminé.*
2. *Sinon, soient* $(i_0; j_0)$ *tel que* $\phi(u_{i_0,j_0}) = inf\{\phi(u_{i;j}) |\ u_{i,j} \neq 0\}$*, permuter les colonnes* C_1 *et* C_{j_0} *et les lignes* L_1 *et* L_{i_0} *de sorte que* u_{i_0,j_0} *Soit en haut à gauche.*
3. *traitement de la première colonne. On commence par* $u_{2;1}$ $(i = 2)$
   (a) *effectuer la division euclidienne de* $u_{i,1}$ *par* $u_{1,1}$ *:* $u_{i,1} = qu_{1,1} + r_i$ *avec* $r_i = 0$ *ou* $\phi(r_i) < \phi(u_{1,1})$*.* $L_i = L_i - qL_1$*. Alors* $u_{i,1} = r_i$
   (b) *si* $r_i \neq 0$ *echanger* L_1 *et* L_i *et retourner en 3.(a)*
   (c) *si* $r_i = 0$ *et* $i < m$ *passer à la lignne suivante : i+1=i et aller en 3.(a)*
   (d) *si* $r_i = 0$ *et* $i = m$ *aller en 4.*
4. *Traitement de la première ligne, on commence par* $u_{1,2}$ *(j=2)*
   (a) *effectuer la division euclidienne de* $u_{1,j}$ *par* $u_{1,1}$ *:* $u_{1,j} = qu_{1,1} + s_j$ *avec* $s_j = 0$ *ou* $\phi(s_j) < \phi(u_{1,1})$*.* $C_j = C_j - qC_1$*. Alors* $u_{1,j} = s_j$
   (b) *si* $r_i \neq 0$ *echanger* C_j *et* C_1 *et retourner en 3.*
   (c) *si* $s_j = 0$ *et* $j < n$ *passer à la lignne suivante : j+1=i et aller en 4.(a)*
   (d) *si* $s_j = 0$ *et* $j = n$ *aller en 5.*
5. *divisibilité.*
   (a) *S'il existe* $i_1 \geq 2$ *et* $j_1 \geq 2$ *tel que* $u_{1,1}$ *ne divise pas* $u_{i_1;j_1}$*.* $C_1 = C_1 + C_{j_1}$ *et aller en 3.*
   (b) *Sinon retourner en 1. avec la matrice* $(u_{i,j})_{2 \leq i \leq m\ 2 \leq j \leq n}$

L'algorithme se termine : En effet $\phi(u_{1,1})$ *est décroissante à valeur dans* $\mathbb{N}$*.*

— *à l'étape 3 l'algorithme revient en arrière si* $r_i \neq 0$ *en remplaçant* $u_(1, 1)$ *par* r_i *avec* $\phi(r_i) < \phi(u_{1,1})$ *donc* $\phi(u_{1,1})$ *décroit strictement donc s'annule forcément, l'algorithme passe nécessairement à l'étape 4.*

— *à l'étape 4 l'algorithme revient en arrière si* $s_j \neq 0$ *en remplaçant* $u_{1,1}$ *par* s_j *avec* $\phi(s_j) < \phi(u_{1,1})$*. à la fin de l'etape 3,* $\phi(u_{1,1})$ *à diminué donc* $\phi(u_{1,1})$ *est encore strictement décroissante dans cette étape, l'algorithme passe forcément à l'etape 5.*

— *à l'étape 5, s'il existe un coéfficient dans* $(u_{i,j})_{2 \leq i \leq m\ 2 \leq j \leq n}$ *qui n'est pas divisé par* $u_{1,1}$ *alors ce coéfficient est placé sur la colonne 1 et à la fin de l'étape 4,* $u_{1,1}$ *le divise. Comme* $(u_{i,j})_{2 \leq i \leq m\ 2 \leq j \leq n}$ *à un nombre fini de coefficients, on ne refait l'etape 5 qu'un nombre fini de fois.*

Finalement, au bout d'un nombrer fini d'étape on aboutit à une matrice de la forme

$$\begin{pmatrix} u'_{1,1} & 0_{1;n-1} \\ 0_{m-1,1} & U' \end{pmatrix}$$

ou $u'_{1,1}$ *divise tous les coefficients de* U'

Voyons l'unicité.

Pour $j \leq s$ *on note* $D_j = d_s ... d_{s-j+1}$*. Pour* $j > s$*,* $D_j = 0$*.* $\Lambda_j(U) = pgcd\{\Delta_j |\ \Delta_j$ *mineur de taille* j *de* $U\}$*. Par définition* Λ_j *est un générateur de l'idéal de* A *engendré par les mineurs de taille* j *de* U*. il est unique à inversible près. Voyons que si* U *et* U' *sont équivalentes alors* $(\Lambda_j(U)) = (\Lambda_j(U'))$

— *Si* $U = PU'$ *avec* $P \in Gl_m(A)$*. Les lignes de* U *sont des combinaisons linéaires des lignes de* U'*. Par mulitilinéarité du déterminant,* $(\Lambda_j(U)) \subset (\Lambda_j(U'))$ *Mais comme* $P^{-1}U = U'$ *on a l'égalité.*

— *Si* $U = U'Q$ *avec* $Q \in Gl_n(A)$*. Comme* $(\Lambda_j(U)) = (\Lambda_j(U^T))$ *En considérant la transposé on se rammène au cas 1*

— *On déduit des deux cas précédents le cas général.*

Les relations de divisibilité des d_i donnent $\Lambda_j(D) = D_j$ donc si $D_1 \sim U \sim D_2$ avec D_1 et D_2 de la forme énoncé alors $\Lambda_j(D_1) = \Lambda_j(D_2)$ et donc par une récurrence immédiate $d_{1,i} = u_i d_{2,i}$ pour tout $i > 0$ avec u_i inversible

Exemple

etape 3 : $\begin{pmatrix} 4 & 8 & 4 \\ 4 & 13 & 11 \\ 4 & 16 & 8 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 7 \\ 4 & 8 & 4 \end{pmatrix}$

etape4 : $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 7 \\ 4 & 8 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 7 \\ 0 & 8 & 4 \end{pmatrix}$

etape 5 : $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 7 \\ 0 & 8 & 4 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 5 & 5 & 7 \\ 8 & 8 & 4 \end{pmatrix}$

etape 4 : $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 5 & 5 & 7 \\ 8 & 8 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 7 \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 4 \end{pmatrix}$

etape 3 : $\begin{pmatrix} 1 & 5 & 7 \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 4 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & -5 & -7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & -20 & -28 \\ 0 & 8 & 4 \end{pmatrix}$

etape 4 : $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & -20 & -28 \\ 0 & 8 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -20 & -28 \\ 0 & 8 & 4 \end{pmatrix}$

Par le même procédé sur $\begin{pmatrix} -20 & -28 \\ 8 & 4 \end{pmatrix}$ On trouve $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 36 \end{pmatrix}$