théorème. *Il exist $\gamma > 0$ tel que*

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} + o(\frac{1}{n})$$

Lemme. *si $\alpha > 1$,*

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}$$

Démonstration. *On considère $t \to \frac{1}{t^\alpha}$ intégrable et decroissante sur $[1, +\infty]$. Si $k \geq 2$ on a*

$$\int_k^{k+1} \frac{dt}{t^\alpha} \leq \frac{1}{k^\alpha} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{dt}{t^\alpha}$$

En sommant de $n+1$ à $N \in \mathbb{N}$ on a :

$$\int_{n+1}^{N+1} \frac{dt}{t^\alpha} \leq \sum_{k=n+1}^{N} \frac{1}{k^\alpha} \leq \int_{n}^{N} \frac{dt}{t^\alpha}$$

$$\left[\frac{1}{(1-\alpha)t^{\alpha-1}}\right]_{n+1}^{N+1} \leq \sum_{k=n+1}^{N} \frac{1}{k^\alpha} \leq \left[\frac{1}{(1-\alpha)t^{\alpha-1}}\right]_{n}^{N}$$

$$\frac{(N+1)^{1-\alpha} - (n+1)^{1-\alpha}}{1-\alpha} \leq \sum_{k=n+1}^{N} \frac{1}{k^\alpha} \leq \frac{N^{1-\alpha} - n^{1-\alpha}}{1-\alpha}$$

$$\frac{1}{(\alpha-1)(n+1)^{\alpha-1}} \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha} \leq \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}$$

$$\frac{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}{(\alpha-1)(n+1)^{\alpha-1}} \leq (\alpha-1)n^{\alpha-1} \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha} \leq 1$$

D'où l'équivlence par le théorème d'encadrement :

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}$$

Démonstration. *On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$, $u_n = H_n - ln(n)$ et $v_n = u_n - \frac{1}{n}$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$*

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{1}{n+1} - ln(n+1) + ln(n) \\ &= \frac{1}{n+1} - ln(\frac{n+1}{n}) \\ &= \frac{1}{n+1} + ln(\frac{n+1-1}{n+1}) \\ &= \frac{1}{n+1} + ln(1 - \frac{1}{n+1}) \\ &\leq \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+1} = 0 \end{aligned}$$

(u_n) est croissante.

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \frac{1}{n+1} - ln(\frac{n+1}{n}) - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n} \\ &= \frac{1}{n} - ln(1 + \frac{1}{n}) \\ &\geq \frac{1}{n} - \frac{1}{n} = 0 \end{aligned}$$

(v_n) croissante, $u_n - v_n = \frac{1}{n} \underset{n\to\infty}{\to} 0$ donc (u_n) et (v_n) adjcentes. Il existe $\gamma \geq 0$ tel que $u_n \underset{n\to\infty}{\to} \gamma$, comme pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ $\gamma \geq v_n$, $\gamma \geq v_0 = 1 - ln(2) > 0$ On a $H_n = ln(n) + \gamma + o(1)$

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ $t_n = u_n - \gamma$. pour $n \geq 2$

$$\begin{aligned} t_n - t_{n-1} &= u_n - u_{n-1} \\ &= \frac{1}{n} + ln(1 - \frac{1}{n}) \\ &= \frac{1}{n} - \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o(\frac{1}{n^2}) \\ &= -\frac{1}{2n^2} + o(\frac{1}{n^2}) \\ &\underset{n\to\infty}{\sim} -\frac{1}{2n^2} \end{aligned}$$

Ainsi $\sum_{k=2}^{\infty}(t_n - t_{n-1})$ converge et par le lemme

$$\begin{aligned} \sum_{k=n+1}^{\infty}(t_k - t_{k-1}) &\underset{n\to\infty}{\sim} -\frac{1}{2}\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{k^2} \\ -t_n &\underset{n\to\infty}{\sim} -\frac{1}{2n} \end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} t_n &= \frac{1}{2n} + o(\frac{1}{n}) \\ H_n - ln(n) - \gamma &= \frac{1}{2n} + o(\frac{1}{n}) \\ H_n &= ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} + o(\frac{1}{n}) \end{aligned}$$