théorème. *le nombre d'endormorphisme digonalisables dans* $Gl(E = \mathbb{F}_q^n)$ *est*

$$|D(E)| = \sum_{m_1+...+m_q=n} \frac{|Gl_n(\mathbb{F}_q)|}{\prod_{i=1}^q |Gl_{m_i}(\mathbb{F}_q)|}$$

avec $|Gl_0(\mathbb{F}_q)| = 1$

Démonstration. *f est diagonalisable si et seulement si μ_f est scindé à racine simple or dans $\mathbb{F}_q$,*
$X^q - X = \prod_{\alpha\in\mathbb{F}_q} X - \alpha$ donc μ_f divise $X^q - X$ et comme μ_f est annulateur de f, $f^q - f = 0$
Ainsi par le lemme des noyaux,

$$\begin{aligned} E &= ker(f^q - f) \\ &= \bigoplus_{\alpha\in\mathbb{F}^q} ker(f - \alpha Id_E) \end{aligned}$$

On définit

$$\mathcal{S} = \left\{ (E_1, ..., E_q) | E_i \text{ s.e.v. de } E \text{ et } E = \bigoplus_{i=1}^q E_i \right\}$$

et $\Phi : D(E) \to \mathcal{S}$ qui à f associe $(ker(f - \alpha_1 Id_E), ..., ker(f - \alpha_q Id_E))$. Φ est bijective. En effet si f_1, f_2 sont tels que $\Phi(f_1) = \Phi(f_2)$ alors $\forall\alpha \in \mathbb{F}_q$, $ker(f_1 - \alpha Id_E) = ker(f_2 - \alpha Id_E)$ et
$E = \bigoplus_{\alpha\in\mathbb{F}_q} ker(f_1 - \alpha Id_E) \bigoplus_{\alpha\in\mathbb{F}_q} ker(f_2 - \alpha Id_E)$. Soit $x \in E$, $x = \sum_{\alpha\in\mathbb{F}_q} x_\alpha v_\alpha$ où
$vect(v_\alpha) = ker(f_1 - \alpha Id_E)$. Alors

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \sum_{\alpha\in\mathbb{F}_q} f_1(x_\alpha v_\alpha) \\ &= \sum_{\alpha\in\mathbb{F}_q} \alpha x_\alpha v_\alpha \\ &= \sum_{\alpha\in\mathbb{F}_q} f_2(x_\alpha v_\alpha) \\ &= f_2(x) \end{aligned}$$

aussi on se donne $(E_1, ..., E_q) \in \mathcal{S}$ on pose $f(x) = \alpha_i x$ si $x \in E_i$ alors $ker(f - \alpha_i Id_E) = E_i$ et f est diagonalisable, $\Phi(f) = (E_1, ..., E_q)$

$GL(E)$ agit sur $\mathcal{S}$ par $u \cdot (E_1, ..., E_q) = (u(E_1), ..., u(E_q))$ Comme les orbites forment une partition de $\mathcal{S}$, le carinal de $\mathcal{S}$ est égal a la somme du cardinal ds orbites de cette action. Or le cardinale de $(E_1, ..., E_q)$ est $\{(F_1, ..., Fq) \in \mathcal{S} | dim(F_i) = dim(E_i)\}$ En effet, si $u \in Gl(E)$ alors clairement $dim(u(E_i)) = dim(E_i)$, d'autre par si on se donne $(F_1, ..., F_q)$ tel que $dim(F_i) = dim(E_i)$ alors on se donne deux bases $e = (e_1, ..., e_n)$ adaptée a $E = \bigoplus_{i=1}^q E_i$ et $f = (f_1, ..., f_n)$ adaptée a $E = \bigoplus_{i=1}^q F_i$. alors u définit par $u(e_i) = f_i$ vérifie $u \cdot (E_1, ..., E_q) = (F_1, ..., Fq)$.

Le cardinal du stabilisateur de $(E_1, ..., E_q) \in \mathcal{S}$ est $\prod_{i=1}^q |Gl_{m_i}(\mathbb{F}_q)|$ où $m_i = dim(E_i)$. En effet on se ronne une base $e = (e_1, ..., e_n)$ adaptée a $E = \bigoplus_{i=1}^q E_i$. $u \in Stab(E_1, ..., E_q)$ ssi $u(E_i) = E_i$ donc dans la base e, $Mat_e(u) = Diag(A_1, ..., A_q)$ avec $A_i \in Gl_{m_i}(\mathbb{F}_q)$ On peut donc définir
$\Psi : Stab(E_1, ..., E_q) \to Gl_{m_1}(\mathbb{F}q) \times ... \times Gl_{m_q}(\mathbb{F}_q)$ qui à u assosie $A_1, ..., A_q)$. Ψ st clairement bijective (u est détrminé uniquement par le q-uplet (A_i) et si on se donne un q-uplet on trouve un u qui est envoyé dessus qui vérifie $u(E_i) = E_i$. Ainsi $|stab(E_1, ..., E_q)| = |Gl_{m_1}(\mathbb{F}q) \times ... \times Gl_{m_q}(\mathbb{F}_q)| = \prod_{i=1}^q |Gl_{m_i}(\mathbb{F}_q)|$

par la formule des classe,

$$|\mathcal{O}(E_1, ..., E_q)| = \frac{Gl_n(\mathbb{F}^q)}{\prod_{i=1}^q |Gl_{m_i}(\mathbb{F}_q)|}$$

On a vu qu'une orbite était uniquement déterminé par un q-uplet $(m_1, ..., m_q) \in (N)^q$ tel que $m_1 + ... + m_q = n$ d'ou finalement

$$|D(E)| = \sum_{m_1+...+m_q=n} \frac{Gl_n(\mathbb{F}^q)}{\prod_{i=1}^q |Gl_{m_i}(\mathbb{F}_q)|}$$