VM
3/01/15

Ensembles de Julia

FGN Analyse 3

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré ≥ 2.

On note $P_n = P \circ \dots \circ P$ (n facteurs).

Soit $K_P = \{ z \in \mathbb{C} \mid (P_n(z)) \text{ est bornée} \}$.

<u>Théorème</u> : (i) K_P est non vide.

(ii) K_P est compact.

(iii) $\mathbb{C} \setminus K_P$ est connexe par arcs.

<u>dém</u> : · <u>Exemple</u> : $P = X^2$

$$K_{X^2} = \{ z \in \mathbb{C} \mid (z^{2^n}) \text{ est bornée} \}$$
$$= \overline{B(0,1)}.$$

(i) Soit α une racine complexe de $P - X$ (non constant car de degré ≥ 2).

Alors $(P_n(\alpha))$ est la suite constante égale à α. Donc $\alpha \in K_P$.

(ii) Tout d'abord, K_P est borné. En effet, comme P est de degré ≥ 2,

$\left| \frac{P(z)}{z} \right| \xrightarrow[|z| \to +\infty]{} +\infty$. Donc il existe $A > 0$ tel que

$\forall |z| > A$, $|P(z)| \geq 2|z|$.

Soit z tel qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $|P_{n_0}(z)| > A$.

Alors $\forall n \geq n_0$, $|P_n(z)| > A$ et $|P_{n+1}(z)| \geq 2 |P_n(z)|$.

Donc $|P_n(z)| \xrightarrow[|z| \to +\infty]{} +\infty$. Ainsi, $z \notin K_P$.

Conclusion : $z \in K_P$ <u>ssi</u> $\forall n \in \mathbb{N}$, $|P_n(z)| \leq A$.

En particulier, si $z \in K_P$, alors $|z| \leq A$. <u>K_P est borné</u>.

Ensuite, K_P est fermé. Soit (z_k) une suite d'éléments de K_P

qui converge vers $z \in \mathbb{C}$. Alors $\forall k$, $\forall n$, $|P_n(z_k)| \leq A$.

Donc comme P_n est continue $\forall n$,

on a $\forall n$, $|P_n(z)| \leq A$ donc $z \in K_P$.

(iii) D'après ce qui précède,

$$\mathbb{C} \setminus K_p = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_n \quad \text{où } U_n = \{ z \in \mathbb{C} \mid |P_n(z)| > A \}.$$

On sait que $\forall n$, U_n est ouvert et que la suite (U_n) est croissante.

<u>Lemme</u> : Soit $Q \in \mathbb{C}[X]$ non constant. Soit $R > 0$.

Alors $U = \{ z \in \mathbb{C} \mid |Q(z)| > R \}$ est connexe par arcs.

D'après ce lemme, $\forall n$, U_n est connexe par arcs.

Soient $x, y \in \mathbb{C} \setminus K_p$. Il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $x, y \in U_n$.

Donc il existe un chemin continu reliant x à y dans U_n, donc dans $\mathbb{C} \setminus K_p$, et donc $\mathbb{C} \setminus K_p$ est connexe par arcs.

<u>dém du lemme</u> :

$|Q(z)| \xrightarrow[|z| \to +\infty]{} +\infty$ donc il existe $R' > 0$ tel que

$$\{ z \in \mathbb{C} \mid |z| > R' \} \subset U.$$

Cet ensemble est donc contenu dans une composante connexe par arcs de U. Ainsi, U a une unique composante connexe par arcs non bornée.

Soit $z_0 \in \mathbb{C}$. Montrons que $U(z_0)$, comp. connexe par arcs de z_0 dans U, est non bornée.

Comme U est ouvert, $U(z_0)$ l'est aussi. Supposons $U(z_0)$ bornée. Alors $K = \overline{U(z_0)}$ est compact.

Donc $\sup_{z \in K} |Q(z)| = \max_K |Q| = \max_{U(z_0)} |Q|$ car sur ∂K, $|Q(z)| = R$. Donc il existe $z_1 \in U(z_0)$ tel que $|Q(z_1)| = \sup_K |Q|$.

Soit $r > 0$ tel que $B(z_1, r) \subset U(z_0)$. $Q(X) = \sum_{k=0}^{d} a_k (X - z_1)^k$, avec $d \geq 1$ et $a_d \neq 0$.

Alors

$$\underset{\displaystyle 2\pi |a_0|^2}{\overset{}{2\pi |Q(z_1)|^2}} \geq \int_0^{2\pi} |Q(z_1 + re^{i\theta})|^2 \, d\theta = 2\pi \sum_{k=0}^{d} |a_k|^2 r^{2k} \geq 2\pi \left(|a_0|^2 + |a_d|^2 r^{2d} \right) > 2\pi |a_0|^2$$

d'où la contradiction : $U(z_0)$ est non bornée. $\square$