

2.4 Théorème du min-max de Courant-Fischer et continuité des valeurs propres dans le cas hermitien (153, 157, 158) [10], [5]

Le but de ce développement est d'exprimer les valeurs propres d'un endomorphisme auto-adjoint u en regardant le quotient de Rayleigh-Ritz :

$$\forall x \in E \setminus \{0\}, \quad R_u(x) = \frac{\langle u(x), x \rangle}{\|x\|^2}.$$

On a vu que son maximum était une valeur propre de u , et même la plus grande valeur propre de u , quand on a prouvé le théorème spectral. On va donc faire pareil ici, mais en regardant le maximum sur des sous-espaces vectoriels de dimension plus petites.

Théorème 2.10 (Courant-Fischer). Soient $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien ou hermitien de dimension n et u un endomorphisme auto-adjoint de E , dont les valeurs propres rangées dans l'ordre croissant sont notées $\lambda_1(u) \leq \dots \leq \lambda_n(u)$. Alors, en notant, pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, \mathcal{F}_k l'ensemble des sous-espaces vectoriels de E de dimension k , on a :

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \lambda_k(u) = \min_{F \in \mathcal{F}_k} \left(\max_{x \in F \setminus \{0\}} \frac{\langle u(x), x \rangle}{\|x\|^2} \right) = \max_{F \in \mathcal{F}_{n-k+1}} \left(\min_{x \in F \setminus \{0\}} \frac{\langle u(x), x \rangle}{\|x\|^2} \right).$$

De ce théorème se déduit le résultat suivant :

Corollaire 2.11 (Inégalité de perturbation de Weyl). Si u et v sont deux endomorphismes auto-adjoints de E , alors :

$$\lambda_k(u) + \lambda_1(v) \leq \lambda_k(u + v) \leq \lambda_k(u) + \lambda_n(v).$$

En particulier, en notant $\|\cdot\|$ la norme subordonnée à la norme euclidienne ou hermitienne sur E , on a :

$$|\lambda_k(u + v) - \lambda_k(u)| \leq \|v\|.$$

Ainsi, les applications :

$$\begin{aligned} \lambda_k &: \mathcal{S}(E) \longrightarrow \mathbb{R} \\ u &\longmapsto \lambda_k(u) \end{aligned}$$

sont 1-lipschitziennes, donc continues.

Démonstration du théorème. Remarquons déjà que pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et pour tout $F \in \mathcal{F}_k$ (resp. $F \in \mathcal{F}_{n-k+1}$), on a :

$$\forall x \in F \setminus \{0\}, \quad R_u(x) = \left\langle u \left(\frac{x}{\|x\|} \right), \frac{x}{\|x\|} \right\rangle = R_u \left(\frac{x}{\|x\|} \right).$$

Ainsi :

$$\sup_{x \in F \setminus \{0\}} R_u(x) = \sup_{\substack{x \in F \\ \|x\|=1}} R_u(x) = \max_{\substack{x \in F \\ \|x\|=1}} R_u(x).$$

La dernière égalité vient du fait que la sphère unité est compacte et que R_u est continue, et donc le sup est en fait un max. Le même raisonnement s'applique en remplaçant les sup par des inf et les max par des min. Ainsi, les quantités :

$$\max_{x \in F \setminus \{0\}} R_u(x) \quad (\text{resp.} \quad \min_{x \in F \setminus \{0\}} R_u(x))$$

sont bien définies. À partir de là, notons, pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$:

$$\mu_k^-(u) = \inf_{F \in \mathcal{F}_k} \left(\max_{x \in F \setminus \{0\}} R_u(x) \right),$$

et :

$$\mu_k^+(u) = \sup_{F \in \mathcal{F}_{n-k+1}} \left(\min_{x \in F \setminus \{0\}} R_u(x) \right).$$

Étant donné que u est auto-adjoint, il existe une base orthonormée (e_1, \dots, e_n) de diagonalisation de u . Considérons alors l'espace vectoriel :

$$E_k = \text{Vect}(e_1, \dots, e_k) \in \mathcal{F}_k.$$

Soit $x \in E_k \setminus \{0\}$. Ce vecteur s'écrit :

$$x = \sum_{i=1}^k \alpha_i e_i$$

avec $(\alpha_1, \dots, \alpha_k) \in \mathbb{K}^k \setminus \{(0, \dots, 0)\}$. On a alors :

$$\begin{aligned} \langle u(x), x \rangle &= \left\langle \sum_{i=1}^k \lambda_i(u) \alpha_i e_i, \sum_{j=1}^k \alpha_j e_j \right\rangle \\ &= \sum_{i=1}^k \underbrace{\lambda_i(u)}_{\leq \lambda_k(u)} |\alpha_i|^2 \quad \text{car } (e_1, \dots, e_k) \text{ est une famille orthonormée.} \\ &\leq \lambda_k(u) \sum_{i=1}^k |\alpha_i|^2 \\ &= \lambda_k(u) \|x\|^2. \end{aligned}$$

D'où :

$$\forall x \in E_k \setminus \{0\}, \quad R_u(x) \leq \lambda_k(u).$$

Ainsi :

$$\max_{x \in E_k \setminus \{0\}} R_u(x) \leq \lambda_k(u).$$

Or, on a :

$$R_u(e_k) = \lambda_k(u).$$

Donc :

$$\max_{x \in E_k \setminus \{0\}} R_u(x) = \lambda_k(u).$$

De même, en considérant l'espace vectoriel :

$$F_k = \text{Vect}(e_k, \dots, e_n) \in \mathcal{F}_{n-k+1},$$

on a :

$$\forall x \in F_k \setminus \{0\}, \quad R_u(x) \geq \lambda_k(u)$$

et donc :

$$\min_{x \in F_k \setminus \{0\}} R_u(x) = \lambda_k(u).$$

D'où :

$$\mu_k^-(u) \leq \lambda_k(u) \leq \mu_k^+(u).$$

Prenons alors un sous-espace vectoriel V de E de dimension $n - k + 1$. Puisque E_k est de dimension k et que $n - k + 1 + k = n + 1 > n$, l'intersection $E_k \cap V$ n'est pas triviale. Ainsi, en prenant $y \in E_k \cap V \setminus \{0\}$, on a :

$$\min_{x \in V \setminus \{0\}} R_u(x) \leq R_u(y) \leq \max_{x \in E_k \setminus \{0\}} R_u(x) = \lambda_k(u).$$

Ainsi :

$$\forall V \in \mathcal{F}_{n-k+1}, \quad \min_{x \in V \setminus \{0\}} R_u(x) \leq \lambda_k(u),$$

et c'est une majoration indépendante de V . Ainsi, par la propriété de borne sup :

$$\mu_k^+(u) \leq \lambda_k(u).$$

Idem, en prenant $W \in \mathcal{F}_k$, l'intersection $W \cap F_k$ n'est pas triviale car $\dim F_k = n - k + 1$. D'où, en prenant $y \in W \cap F_k \setminus \{0\}$, on a :

$$\min_{x \in F_k \setminus \{0\}} R_u(x) = \lambda_k(u) \leq R_u(y) \leq \max_{x \in W \setminus \{0\}} R_u(x),$$

et donc :

$$\lambda_k(u) \leq \mu_k^-(u).$$

On a donc la chaîne d'inégalités :

$$\mu_k^-(u) \leq \lambda_k(u) \leq \mu_k^+(u) \leq \lambda_k(u) \leq \mu_k^-(u).$$

Ainsi, toutes ces inégalités sont des égalités. Et, étant donné que $E_k \in \mathcal{F}_k$ et $F_k \in \mathcal{F}_{n-k+1}$ et que :

$$\min_{x \in F_k \setminus \{0\}} R_u(x) = \lambda_k(u) = \max_{x \in E_k \setminus \{0\}} R_u(x)$$

on a bien :

$$\lambda_k(u) = \min_{F \in \mathcal{F}_k} \left(\max_{x \in F \setminus \{0\}} \frac{\langle u(x), x \rangle}{\|x\|^2} \right) = \max_{F \in \mathcal{F}_{n-k+1}} \left(\min_{x \in F \setminus \{0\}} \frac{\langle u(x), x \rangle}{\|x\|^2} \right).$$

□

Démonstration du corollaire. On a :

$$\forall x \in E \setminus \{0\}, \quad R_{u+v}(x) = R_u(x) + R_v(x)$$

et :

$$\forall x \in E \setminus \{0\}, \quad \lambda_1(v) \leq R_v(x) \leq \lambda_n(v).$$

D'où :

$$\forall x \in E \setminus \{0\}, \quad \lambda_1(v) + R_u(x) \leq R_{u+v}(x) \leq \lambda_n(v) + R_u(x).$$

Ainsi (par exemple) :

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \forall F \in \mathcal{F}_k, \quad \lambda_1(v) + \max_{x \in F \setminus \{0\}} R_u(x) \leq \max_{x \in F \setminus \{0\}} R_{u+v}(x) \leq \lambda_n(v) + \max_{x \in F \setminus \{0\}} R_u(x)$$

Ainsi, par le théorème du min-max de Courant-Fischer, on a :

$$\lambda_1(v) + \lambda_k(u) \leq \lambda_k(u+v) \leq \lambda_n(v) + \lambda_k(u).$$

On a donc :

$$-\rho(v) \leq \lambda_1(v) \leq \lambda_k(u+v) - \lambda_k(v) \leq \lambda_n(v) \leq \rho(v).$$

Ainsi :

$$|\lambda_k(u+v) - \lambda_k(v)| \leq \rho(v).$$

Or, puisque v est auto-adjoint (en particulier, v est normal), on a :

$$\rho(v) = \|v\|,$$

ce qui conclut la preuve! □

Remarque 2.4.1 (Au secours, je comprends pas pourquoi si v est normal alors $\rho(v) = \|v\|$!). Je vais prouver ce fait dans \mathbb{C}^n muni de sa structure hermitienne canonique. Si v est un endomorphisme normal, alors il existe une base orthonormée (e_1, \dots, e_n) de \mathbb{C}^n qui diagonalise v . Notons $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ ses valeurs propres. On a alors :

$$\forall x = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i \in \mathbb{C}^n, \quad \|v(x)\|^2 = \sum_{i=1}^n |\lambda_i|^2 |\alpha_i|^2 \leq \rho(v)^2 \sum_{i=1}^n |\alpha_i|^2 = \rho(v)^2 \|x\|^2.$$

Ainsi :

$$\|v\| \leq \rho(v).$$

Enfin, pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que $|\lambda_k| = \rho(v)$, on a :

$$\rho(v) = |\lambda_k| = \|v(e_k)\|$$

avec $\|e_k\| = 1$. Ainsi :

$$\rho(v) \leq \|v\|.$$

On a d'ailleurs le fait plus général suivant : si v est un endomorphisme de E euclidien ou hermitien, alors :

$$\|v\| = \sqrt{\|v^*v\|} = \sqrt{\rho(v^*v)}.$$