théorème. *On a la formule de wallis :*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{2n(2n-2)\dots 2}{(2n-1)(2n-3)\dots 1}\right)^2 = \pi$$

Démonstration. *pour $n \in \mathbb{N}$ on définit*

$$W_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n(x)dx$$

On calcule $W_0 = \pi/2$ et $W_1 = [-\cos(x)]_0^{\pi/2} = 1$ pour $n \geq 2$ on fait une intégration par partie :

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi/2} \sin^n(x)dx &= \int_0^{\pi/2} \sin^{n-1}(x)\sin(x)dx \\
&= \left[-\cos(x)\sin^{n-1}(x)\right]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} -\cos^2(x)(n-1)\sin^{n-2}(x)dx \\
&= \int_0^{\pi/2} (1-\sin^2(x)(n-1)\sin^{n-2}(x)dx \\
&= (n-1)(W_{n-2} - W_n) \\
W_n &= \frac{n-1}{n}W_{n-2}
\end{aligned}$$

Ainsi on trouve les formes générales :

$$\begin{aligned}
W_{2n} &= \frac{(2n-1)\dots 1}{2n\dots 2}\frac{\pi}{2} \\
W_{2n+1} &= \frac{2n\dots 2}{(2n+1)\dots 3}
\end{aligned}$$

On remarque pour tout $x \in [0, \pi/2]$ $\sin^{2n+1}(x) \leq \sin^{2n}(x) \leq \sin^{2n-1}(x)$ donc par la croissance de l'intégrale,

$$\begin{aligned}
W_{2n+1} \leq W_{2n} &\leq W_{2n-1} \\
1 \leq \frac{W_{2n}}{W_{2n+1}} &\leq \frac{W_{2n-1}}{W_{2n+1}} \\
1 \leq (2n+1)\frac{\pi}{2}\left(\frac{(2n-1)\dots 1}{2n\dots 2}\right)^2 &\leq \frac{2n}{2n+1}
\end{aligned}$$

Par le théorème d'encadrement on a

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{(2n-1)\dots 1}{2n\dots 2}\right)^2 = \frac{1}{\pi}$$

d'où la formule de Wallis.

Démonstration. *On a la formule de Stirling :*

$$n! \underset{\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}n^n e^{-n}$$

Démonstration. *on définit deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par $u_n = \frac{\sqrt{n}n^n e^{-n}}{n!}$ et $v_n = ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ Soit*

$n \in \mathbb{N}^*$ on calcule

$$\begin{aligned}
v_n &= ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) \\
&= ln\left(\frac{(n+1)^{n+1}\sqrt{n+1}e^{n+1}n!}{n^n\sqrt{n}e^n(n+1)!}\right) \\
&= ln\left(\frac{1}{e}\frac{(n+1)^{n+\frac{3}{2}}}{n^{n+\frac{1}{2}}(n+1)}\right) \\
&= -1 + ln\left(\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}}\right) \\
&= -1 + (n+\frac{1}{2})ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \\
&= -1 + \left(n+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) \\
&= O\left(\frac{1}{n^2}\right)
\end{aligned}$$

Ainsi $\sum_{n=1}^{\infty} |v_n|$ est équivalente à $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ et donc convergente. Ainsi la série des v_n est absolument convergente donc convergente. Or soit $N \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{n=1}^{\infty} v_n = ln(u_{N+1}) - ln(u_1)$. On en déduit que $(ln(u_n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente vers $l \in \mathbb{R}$. Par continuité de $x \to e^x$, u_n converge vers e^l. On note $\frac{1}{k} = e^l$

$$\begin{aligned}
u_n &\underset{\infty}{\sim} \frac{1}{k} \\
\frac{\sqrt{n}n^n e^{-n}}{n!} &\underset{\infty}{\sim} \frac{1}{k} \\
n! &\underset{\infty}{\sim} k\sqrt{n}n^n e^{-n}
\end{aligned}$$

Calculons k en utilisant la formule de Wallis :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n}\left(\frac{2n(2n-2)\dots2}{(2n-1)(2n-3)\dots1}\right)^2 &= \frac{1}{n}\left(\frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!}\right)^2 \\
&\underset{\infty}{\sim} \frac{1}{n}\left(\frac{2^{2n}(k\sqrt{n}n^n e^{-n})^2}{k\sqrt{2n}(2n)^{2n}e^{-2n}}\right)^2 \\
&\underset{\infty}{\sim} \frac{1}{n}\left(\frac{(k\sqrt{n})^2}{k\sqrt{2n}}\right)^2 \\
&\underset{\infty}{\sim} \frac{k^2}{2}
\end{aligned}$$

Par unicité de la limite on a $\pi = \frac{k^2}{2}$ donc $k = \sqrt{2\pi}$ et donc finalement le formule de stirling

$$n! \underset{\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}n^n e^{-n}$$