théorème. *soit E un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, alors toutes les normes sur E sont équivalentes.*

Démonstration. *Comme E est de dimension finie on peut identifier E à $\mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{C}^n$ Soit $||.||$ une norme sur E. Comparons la à la norme $||.||_1$. Soit $x \in E$, $(x_1, \dots, x_n)$ ses coordonnées dans la base canonique. On a*

$$\begin{aligned} ||x|| &= ||\sum_{i=1}^{n} x_i e_i|| \\ &\leq \sum_{i=1}^{n} |x_i| ||e_i|| \\ &\leq ||x||_1 \sum_{i=1}^{n} ||e_i|| \end{aligned}$$

En posant $M = \sum_{i=1}^{n} ||e_i||$ on a $||x|| \leq M||x||_1$.
Considérons $inf_{x\neq 0} \frac{||x||}{||x||_1} = inf_{x\neq 0} || \frac{x}{||x||_1} || = inf_{||x||_1=1} ||x||$

Soit $\begin{array}{cccc} f & : & (E, ||.||_1) & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \rightarrow & ||x|| \end{array}$ *, Soient $x, y \in E$, $|f(x) - f(y)| = |||x|| - ||y||| \leq ||x - y|| \leq M||x - y||_1$.*
f est M-liepschitzienne donc continue. $S_1 = \{x \in E | ||x||_1 = 1\}$ est compact donc f est bornée et atteint ses bornes sur S_1. C'est à dire qu'il existe $x_0 \in S_1$ tel que :

$$\begin{aligned} inf_{x\in S_1} f(x) &= f(x_0) \\ inf_{||x||_1=1} ||x|| &= ||x_0|| \\ inf_{x\neq 0} \frac{||x||}{||x||_1} &= ||x_0|| \end{aligned}$$

Ainsi en posant $m = ||x_0||$, pour tout $x \in E, m||x||_1 \leq ||x|| \leq M||x||_1$.

Comme l'équivalence des normes est une relation d'équivalence on a par transitivité que toutes les normes sont équivalentes sur E.

théorème. *Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoiel avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Alors E est de dimension finie si et seulement si $\overline{B(0,1)}$ est compact*

Lemme. *soit $F \subset E$ un sous espace vectoriel stricte de E fermé. Alors pour tout $1 > \varepsilon > 0$ il existe $u \in E$, $||u|| = 1$ tel que $d(u, F) > 1 - \varepsilon$*

Démonstration. *Soit $v \in E \setminus F$. on pose $d = d(v, F) = inf_{x\in F} ||v - x|| > 0$ car F est fermé. Soit $\delta > 0$ il existe $x \in F$ tel que $||v - w|| < \delta$. on pose $\alpha = \frac{1}{||v-w||}$, $u = \alpha(v - w)$. Soit $x \in F$ on a*

$$\begin{aligned} ||u - x|| &= ||\alpha(v - w) - x \\ &= \alpha||v - (\alpha^{-1}x - w)|| \\ &\geq \alpha d \\ &> \frac{d}{d + \delta} \end{aligned}$$

En prenant $\delta = \frac{d\varepsilon}{1-\varepsilon}$ il vient $||u - x|| > 1 - \varepsilon$ et donc $d(u, F) \geq 1 - \varepsilon$

Démonstration. *Supposons que $B = \overline{B(0,1)}$ est précompact. Alors il existe $D \subset B$ fini tel que pour tout $x \in B, d(x, D) \leq 1/4$. Soit $F = vect(D)$, F est un sous-espace vectoriel de E de dimension finie donc fermé. Supposons que $F \neq E$. alors par le lemme précédent il existe $u \in E \setminus F$, $||u|| = 1$ tel que $d(u, F) \geq 1 - 1/4 = 3/4$. Comme $D \subset F$, $d(u, D) \geq d(u, F) \geq 3/4$ or $||u|| = 1$ donc $u \in B$ et $d(u, D) \leq 1/4$, contradiction. $F = E$.*
On a B $précompact \implies dim(E)$ $finie \implies B$ $compact \implies B$ $précompact$.