1 Formule d'Euler Mac-Laurin

Difficulté : Dure
Thèmes : Intégration, polynômes de Bernoulli, developpment asymptotique
Leçons concernées : **224**, **230**, **228**.
Références : Candelpergher, Calcul intégral

Enoncé 1. *Soient $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$ et f une fonction indéfiniment dérivable sur $[1, +\infty[$ pour laquelle il existe $M \geq 1$ tel que pour tout $m \geq M$, on ait:*

$$\partial^m f(x) = O\left(\frac{1}{x^2}\right) \qquad \text{quand } x \to +\infty.$$

Alors on a, pour tout $m \geq M$

$$f(1) + \cdots + f(n) = T_m(n) + C + R_m(n),$$

où $T_m(n)$ est un terme dépendant de n :

$$T_m(n) = \int_1^n f(x)\mathrm{d}x + \frac{f(n)}{2} + \sum_{k=2}^{m} \frac{(-1)^k B_k}{k!}\partial^{k-1} f(n),$$

C est une constante (indépendante de m et n)

$$C = \frac{f(1)}{2} - \sum_{k=1}^{m} \frac{(-1)^k B_k}{k!}\partial^{k-1} f(1) + (-1)^{m+1}\int_1^{+\infty} \frac{b_m(x)}{m!}\partial^m f(x)\mathrm{d}x.$$

et $R_m(n)$ tend vers 0 quand $n \to +\infty$.

$$R_m(n) = (-1)^m \int_n^{+\infty} \frac{b_m(x)}{m!}\partial^m f(x)\mathrm{d}x.$$

Les B_k sont les nombres de Bernoulli et les b_k sont les polynômes de Bernoulli définis sur $[0, 1[$ et prolongés par 1-périodicité.

Pour ce développement, étant donné la complexité de l'énoncé, on commencera par l'application pour comprendre l'utilité et on démontrera le résultat après.

Application. Observons ce qu'il se passe si $f(x) = \frac{1}{x^2}$. On a $M = 1$, donc pour $m = 7$ par exemple

$$\begin{aligned}
1 + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n^2} &= T_m(n) + C + R_m(n) \\
&= \int_1^n \frac{\mathrm{d}x}{x^2} + \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{6n^3} + \frac{1}{30n^5} - \frac{1}{42n^7} + C + O\left(\frac{1}{n^9}\right) \\
&= 1 + C - \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{6n^3} + \frac{1}{30n^5} - \frac{1}{42n^7} + O\left(\frac{1}{n^9}\right)
\end{aligned}$$

Cette formule donne une estimation des sommes partielles avec une grande précision. Par exemple, pour $n = 100$, on calcule 5 termes au lieu de 100 avec une précision de l'ordre de 18 chiffres après la virgule. Enfin cela à condition qu'on sache calculer la constante C.

Démonstration. La démonstration de ce résultat est, malgré les apparences, assez simple en réalité. L'idée est la suivante: lorsqu'on réalise une IPP, on intègre souvent la constante 1 en x. Ici, on va plutôt l'intégrer en un polynôme d'intégrale nulle sur $[0, 1]$.

Lemme 1. *Il existe une suite de polynômes* (p_n) *tel que* $p_0 = 1$ *et* $\partial p_n = p_{n-1}$

Pour de tels polynômes, si f est infiniment dérivable sur $[0,1]$, on a alors

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x &= \int_0^1 f(x)p_0(x)\mathrm{d}x \\ &= [f(x)p_1(x)]_0^1 - \int_0^1 f'(x)p_1(x)\mathrm{d}x \\ &= [f(x)p_1(x)]_0^1 - [f'(x)p_2(x)]_0^1 + \int_0^1 \partial^2 f(x)p_2(x)\mathrm{d}x \\ &\dots \\ &= \sum_{k=1}^{m}(-1)^{k-1}[p_k\partial^{k-1}f]_0^1 + (-1)^m\int_0^1 p_m(x)\partial^m f(x)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Comme chaque terme de la somme fait intervenir des termes de bord des p_n, pour simplifier la formule, on aimerait alors que $p_n(0) = p_n(1)$. En fait on peut prendre les p_n tel que $p_n(0) = p_n(1), \forall n \geq 2$. Cette condition équivaut à

$$\int_0^1 p_n(x)\mathrm{d}x = 0, \quad \text{pour tout } n \geq 1.$$

Par récurrence, on montre que la suite (p_n) vérifie

$$p_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} a_k \frac{x^{k+1}}{k+1} + C_{n+1}.$$

Et la condition sur l'intégrale détermine la constante C_{n+1}. Cela prouve l'existence et l'unicité de la suite (p_n). On appelle alors polynômes de Bernoulli les polynômes $x \mapsto B_n(x)$, où $B_n(x)$ est tel que $p_n(x) = \frac{B_n(x)}{n!}$, et les nombres de Bernoulli sont les $B_n = B_n(0)$. Ces nombres vérifient une variété de propriétés, par exemple que pour $k \geq 1$, $B_{2k+1} = 0$. Cela étant dit, la formule écrite précedemment donne alors

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \frac{f(0)+f(1)}{2} + \sum_{k=2}^{m}\frac{(-1)^{k-1}B_k}{k!}[\partial^{k-1}f]_0^1 + (-1)^m\int_0^1 \frac{B_m(x)}{m!}\partial^m f(x)\mathrm{d}x.$$

On a alors presque terminé. Ayant établi cette égalité sur $[0,1]$, par relation de Chasles, on sait presque estimer $\int_p^q f(x)\mathrm{d}x$. Prolongeant par 1-périodicité les B_k, ce que donne b_k défini par $b_k(x) = B_k(x - [x])$, on a alors

$$\begin{aligned}\int_p^q f(x)\mathrm{d}x = \frac{f(p)}{2} + f(p+1) + \cdots + f(q-1) + \frac{f(q)}{2} \\ + \sum_{k=2}^{m}\frac{(-1)^{k-1}B_k}{k!}[\partial^{k-1}f]_p^q + (-1)^m\int_p^q \frac{b_m(x)}{m!}\partial^m f(x)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Cette formule donne une expression pour l'intégrale de f. Maintenant, en réarrangeant, en prenant $p = 1$ et $q = n$, il vient alors

$$\begin{aligned}f(1) + \cdots + f(n) = \int_1^n f(x)\mathrm{d}x + \frac{f(1)+f(n)}{2} + \sum_{k=2}^{m}\frac{(-1)^k B_k}{k!}[\partial^{k-1}f]_1^n \\ + (-1)^{m+1}\int_1^n \frac{b_m(x)}{m!}\partial^m f(x)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

La dernière intégrale dans cette formule n'a aucune raison de tendre vers 0. Utlisant alors l'hypothèse sur les dérivées de f, on s'assure la convergence de l'intégrale, ce qui justifie d'écrire

$$\int_1^n \frac{b_m(x)}{m!}\partial^m f(x)\mathrm{d}x = \int_1^{+\infty}\frac{b_m(x)}{m!}\partial^m f(x) - \int_n^{+\infty}\frac{b_m(x)}{m!}\partial^m f(x)\mathrm{d}x.$$

Et la dernière intégrale, noté $R_m(n)$, est bien une quantité qui tend vers 0 quand n tend vers l'infini. Afin de conclure, il suffit de montrer que le terme

$$C_m = \frac{f(1)}{2} - \sum_{k=2}^{m}\frac{(-1)^k B_k}{k!}\partial^{k-1}f(1) + (-1)^{m+1}\int_1^{+\infty}\frac{b_m(x)}{m!}\partial^m f(x)\mathrm{d}x.$$

est constant. Il est clair qu'il ne dépend pas de n mais en fait, il ne dépend pas non plus de m pour $m \geq M$. En effet, on a

$$\int_1^{+\infty} \frac{b_m(x)}{m!} \partial^m f(x) \mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{+\infty} \int_k^{k+1} \frac{b_m(x)}{m!} \partial^m f(x) \mathrm{d}x.$$

et en intégrant par parties

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{+\infty} \int_k^{k+1} \frac{b_m(x)}{m!} \partial^m f(x) \mathrm{d}x \\
&\qquad = \sum_{k=1}^{+\infty} \left[\frac{b_{m+1}(x)}{(m+1)!} \partial^m f(x) \right]_k^{k+1} - \sum_{k=1}^{+\infty} \int_k^{k+1} \frac{b_{m+1}(x)}{(m+1)!} \partial^{m+1} f(x) \mathrm{d}x \\
&\qquad = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{B_{m+1}}{(m+1)!} (\partial^m f(k+1) - \partial^m f(k)) - \int_1^{+\infty} \frac{b_{m+1}(x)}{(m+1)!} \partial^{m+1} f(x) \mathrm{d}x \\
&\qquad = -\frac{B_{m+1}}{(m+1)!} \partial^m f(1) - \int_1^{+\infty} \frac{b_{m+1}(x)}{(m+1)!} \partial^{m+1} f(x) \mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
C_m &= \frac{f(1)}{2} - \sum_{k=2}^{m} \frac{(-1)^k B_k}{k!} \partial^{k-1} f(1) + (-1)^{m+1} \int_1^{+\infty} \frac{b_m(x)}{m!} \partial^m f(x) \mathrm{d}x \\
&= \frac{f(1)}{2} - \sum_{k=2}^{m} \frac{(-1)^k B_k}{k!} \partial^{k-1} f(1) + (-1)^{m+1} \left(-\frac{B_{m+1}}{(m+1)!} \partial^m f(1) - \int_1^{+\infty} \frac{b_{m+1}(x)}{(m+1)!} \partial^{m+1} f(x) \mathrm{d}x \right) \\
&= \frac{f(1)}{2} - \sum_{k=2}^{m+1} \frac{(-1)^k B_k}{k!} \partial^{k-1} f(1) + (-1)^{m+2} \int_1^{+\infty} \frac{b_{m+1}(x)}{(m+1)!} \partial^{m+1} f(x) \mathrm{d}x \\
&= C_{m+1}
\end{aligned}$$

Ce qui conclut le développement. □