# 1 Calcul des $\zeta(2k)$ et développement asymptotique des nombres de Bernoulli

Difficulté : Moyenne
Thèmes : Séries de Fourier, polynômes de Bernoulli, suites et séries de nombres réels
Leçons concernées : **230**, **246**
Références : Caldero, Carnet de Voyage en Analystan **INTERDIT AU CONCOURS**

**Enoncé 1.** *Pour tout $k \geq 1$,*

$$\zeta(2k) = (-1)^{k-1} \frac{(2\pi)^{2k}}{2 \cdot (2k)!} b_{2k},$$

*où les $b_n$ sont les nombres de Bernoulli.*

**Lemme 1.** *Il existe une unique suite de polynôme $(B_n[X])_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}[X]$ tels que $B_0 = 1$, $B_n' = nB_{n-1}$ et $\forall n \geq 1, \int_0^1 B_n = 0$.*

*Démonstration.* Démontrons le résultat par récurrence. Supposons $B_{n-1}$ unique. Alors $B_n = P_n + K$, $\mathbb{K} \in \mathbb{R}$, avec $P_n$ l'unique primitive de $nB_{n-1}$ s'annulant en 0. La constante $K$ est alors donnée par $K = -\int_0^1 P_n(t)\mathrm{d}t$. On remarque que pour $n \geq 2$, cela équivaut à $B_n(0) = B_n(1)$ et que $B_1 = t - \frac{1}{2}$. Les nombres de Bernoulli sont alors $b_n = B_n(0)$. □

*Démonstration.* Pour démontrer le théorème, considérons l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui a $x \mapsto \frac{B_n(\{x\})}{n!}$. Appelons là $f_n$. C'est une fonction 1-périodique, et on va montrer que pour $n \geq 2$, elle est continue. La continuité est assuré sur l'intervalle $[0, 1[$, montrons la continuité en 1:

$$\lim_{x\to 1^-} f_n(x) = \frac{B_n(1)}{n!} = \frac{B_n(0)}{n!} = f_n(0).$$

Donc $f_n$ est continue pour $n \geq 2$. De plus, remarquons qu'elle est $C^1$ par morceaux car polynômiale par morceaux, ce qui sera utile par la suite. Calculons désormais les coefficients de Fourier de $f_n$. Soit $n \geq 1$, on a

$$c_0(f_n) = \int_0^1 f_n(t)\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{B_n(t)}{n!}\mathrm{d}t = 0.$$

Pour $p \neq 0$, montrons par récurrence que, $\forall n \geq 1, c_p(f_n) = \frac{-1}{(2i\pi p)^n}$.
Pour $n = 1$,

$$\begin{aligned} c_p(f_1) &= \int_0^1 (t - \frac{1}{2})e^{-2i\pi pt}\mathrm{d}t \\ &= \left[(t - \frac{1}{2})\frac{e^{-2i\pi pt}}{-2i\pi p}\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{e^{-2i\pi pt}}{2i\pi p}\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2i\pi p}. \end{aligned}$$

Supposons alors que le résultat soit vrai au rang $n$.

$$c_p(f_n) = \int_0^1 f_n(t)e^{-2i\pi pt}\mathrm{d}t = \left[f_n(t)\frac{e^{-2i\pi pt}}{-2i\pi p}\right]_0^1 + \int_0^1 f_{n-1}(t)\frac{e^{-2i\pi pt}}{2i\pi p}\mathrm{d}t = 0 + \frac{1}{2i\pi p}c_p(f_{n-1}).$$

Ainsi, par le théorème de Jordan Dirichlet et comme $f_n$ est continue, la série de Fourier de $f_n$ converge vers $f$ partout. Ainsi,

$$\begin{aligned} f_{2p}(t) &= \sum_{p\in\mathbb{Z}^*} c_p(f_{2p})e^{2i\pi pt} \\ &= \sum_{p>0} c_p(f_{2p})(e^{2i\pi pt} + e^{-2i\pi pt}). \end{aligned}$$

En particulier, en évaluant en $t = 0$, on obtient

$$\frac{b_{2k}}{(2k)!} = \sum_{p>0} 2\frac{(-1)^{k-1}}{2^{2k}p^{2k}\pi^{2k}}.$$

Enfin, en réarrangeant, on trouve

$$\sum_{p>0} \frac{1}{p^{2k}} = \zeta(2k) = \frac{b_{2k}\,(-1)^{k-1}\,2^{2k}\,\pi^{2k}}{2 \cdot (2k)!}.$$

Enfin, comme $\lim_{k\to\infty} \zeta(2k) = 1$, on a

$$b_{2k} \overset{k\to\infty}{\sim} \frac{2 \cdot (2k)!}{(-1)^{k-1}\,2^{2k}\,\pi^{2k}}.$$

□

**Remarque.** L'asymptotique peut être précisé avec la formule de Stirling.