1 Classification des groupes simples d'ordre 60

Difficulté : Facile
Thèmes : Théorème de Sylow, action de groupe, groupe quotient, groupe symétrique
Leçons concernées : **101**, **103**, **104**, **105**
Références : Szpirglas, Mathématiques L3 Algèbre

Enoncé 1. *Soit G un groupe simple d'ordre 60. Alors G est isomorphe à A_5.*

Démonstration. L'idée est de faire agir G sur un ensemble de cardinal 5, par exemple G/H, avec H un sous-groupe d'indice 5 dans G. Commençons par montrer qu'un tel H existe.
Supposons par l'absurde qu'il n'existe pas de sous groupe strict de G d'indice inférieur ou égal à 5. On a

$$60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5.$$

Considérons N_2 l'ensemble des 2-Sylow de G, et n_2 son cardinal. Par les théorèmes de Sylow, on a n_2 qui divise 15. De plus, l'action par conjugaison de G sur N_2 est transitive (les p-Sylow étant tous conjugués). On a alors par la formule des classes, pour x un 2-Sylow quelconque:

$$|G| = |\mathrm{Stab}_x|\ |O_x| = |\mathrm{Stab}_x|\ n_2.$$

Le stabilisateur étant un sous-groupe de G, n_2 est donc l'indice du stabilisateur d'un 2-Sylow quelconque. Si $n_2 = 1$, alors le 2-Sylow est distingué dans G ce qui est absurde par hypothèse. Par hypothèse, on a nécessairement $n_2 = 15$ car sinon, on aurait un sous groupe d'indice ≤ 5. On a alors 15 2-Sylow.
Considérons maintenant S_1 et S_2, deux 2-Sylow distincts de G. Montrons que leur intersection est réduit au neutre. Soit $g \in S_1 \cap S_2$. D'après la classification des groupes finis d'ordre 4, tous les 2-Sylow sont abéliens, donc le centralisateur de g, $C(g)$, contient $S_1 \cup S_2$. Cette réunion est de cardinal ≥ 4 puisque S_1 et S_2 sont disctincts, et comme $C(g)$ contient S_1, son cardinal est un multiple de 4 (par le théorème de Lagrange). Les multiples de 4 qui divisent 60 sont respectivement 12, 20 et 60. D'après l'hypothèse qu'on a faite au départ, on a nécessairement, $C(g) = 60$. Donc g est dans le centre. Si $g \neq e$, alors le centre est non trivial et distingué dans G, absurde car G est simple. Donc $g = e$. Mais alors, on a

$$|\{x \in G,\ \mathrm{ord}(x) = 2 \text{ ou } \mathrm{ord}(x) = 4\}| = 15\ (4 - 1) = 45.$$

On a fini avec les 2-Sylow. Regardons maintenant les 5-Sylow. Les théorèmes de Sylow donnent directement que le nombre de 5-Sylow, n_5, vaut 6. Chaque 5-Sylow est cyclique d'ordre 5 et d'intersection le neutre deux à deux. En effet, s'ils avaient un élément non trivial en commun, cet élément serait nécessairement générateur des deux groupes car 5 est premier. Ainsi,

$$|\{x \in G,\ \mathrm{ord}(x) = 5\}| = 6\ (5 - 1) = 24.$$

Or, $45 + 24 = 69 > 60$. Absurde. Donc G admet un sous-groupe strict d'indice ≤ 5.
Supposons désormais que G admette un sous groupe d'indice ≤ 4, et montrons que c'est impossible. Soit H un tel sous-groupe. Alors G agit naturellement et non trivialement à gauche sur l'ensemble G/H et induit un morphisme (non trivial)

$$\Phi : G \longrightarrow S_{|G/H|}.$$

Comme G a cardinal 60 et $S_{|G/H|}$ a cardinal $\leq 4! = 24$, le morphisme Φ n'est pas injectif, ce qui signifie que $\ker \Phi$ est non trivial. Donc G admet un sous-groupe distingué. Absurde!
On a alors montré qu'il existe un sous groupe H d'indice égal à 5 dans G. Par le même raisonnement, on dispose d'un morphisme Ψ de G dans $S_{|G/H|}$. G étant simple, le morphisme est injectif. Or, $S_{|G/H|}$ a cardinal 120 et G cardinal 60. Donc par le 1er théorème d'isomorphisme, G est isomorphe à un sous-groupe d'indice 2 dans $S_{|G/H|}$. Par unicité du morphisme signature, on a G isomorphe à $A_{|G/H|} \simeq A_5$ □

Remarque. Le jury pourra vous demander si le quotient G/H a une structure. Cet ensemble est toujours bien défini tant que H est sous-groupe de G. Si G est fini, on peut toujours munir G/H d'une structure de groupe, en revanche, c'est un sous-groupe de G (au sens où il existe un morphisme de G dans G/H) si et seulement si H est distingué dans G. Le jury questionnera sûrement sur le morphisme signature, qu'il faut savoir définir clairement et justifier son caractère morphique.