Fonctions dont la différentielle en tout point est une isométrie

Théo Jaudon

Soit E un espace euclidien, $u \in \mathcal{O}(E)$ une isométrie linéaire, $a \in E$ et

$$\begin{array}{cccc} f: & E & \to & E \\ & x & \mapsto & u(x)+a \end{array}$$

une isométrie affine. Alors f est de classe $\mathcal{C}^1$ et la différentielle de f en tout point $x \in E$ est $df(x) = u \in \mathcal{O}(E)$. L'objectif du développement est de prouver la réciproque.

Théorème 1. *Soit $f : E \to E$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ dont la différentielle en tout point de E est une isométrie. Alors f est une isométrie affine.*

Preuve. Soit $a \in E$. Montrons qu'il existe un voisinage ouvert U_a de a sur lequel f préserve les distances i.e tel que $\|f(x) - f(y)\| = \|x - y\|$ pour tout $(x, y) \in U_a^2$.
Pour $(x, y) \in E^2$, l'inégalité des accroissements finis donne

$$\|f(x) - f(y)\| \leq \sup_{z\in[x,y]} \|df(z)\|\|x - y\| \leq \|x - y\|$$

puisque $df(z) \in \mathcal{O}(E)$ et en particulier $\|df(z)\| = 1$.
Comme $df(a) \in \mathcal{O}(E) \subset GL(E)$, le théorème d'inversion locale fournit l'existence d'un voisinage ouvert U_a de a tel que $f : U_a \to f(U_a) = V_a$ soit un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme dont on note $g : V_a \to U_a$ la réciproque. Quitte à considérer $B \subset V_a$ une boule ouverte contenant a et à remplacer U_a par $g(B)$, on peut supposer que V_a est une boule ouverte.
Pour $(x, y) \in U_a$ l'inégalité des accroissements finis donne alors

$$\|x - y\| = \|g(f(x)) - g(f(y))\| \leq \sup_{z\in[f(x),f(y)]} \|dg(z)\|\|f(x) - f(y)\|$$

et comme $dg(z) = (df(g(z))^{-1} \in \mathcal{O}(E)$ on trouve

$$\|x - y\| \leq \|f(x) - f(y)\|.$$

Ainsi pour tout $(x, y) \in U_a^2$ on a $\|f(x) - f(y)\| = \|x - y\|$ ou, de façon équivalente, $\langle f(x) - f(y), f(x) - f(y)\rangle = \langle x - y, x - y\rangle$. En différentiant par rapport à x et en évaluant en $h \in E$ on trouve

$$\langle df(x) \cdot h, f(x) - f(y)\rangle + \langle f(x) - f(y), df(x) \cdot h\rangle = \langle h, x - y\rangle + \langle x - y, h\rangle$$

donc

$$\langle df(x) \cdot h, f(x) - f(y)\rangle = \langle h, x - y\rangle.$$

En différentiant par rapport à y et en évaluant en $l \in E$ on trouve que pour tout $(x, y) \in U_a^2$ et pour tout $(h, l) \in E^2$ on a

$$\langle df(x) \cdot h, df(y) \cdot l\rangle = \langle h, l\rangle.$$

Ainsi pour $(x, y) \in U_a^2$ et pour tout $h \in E$ on a

$$\|df(x)\cdot h-df(y)\cdot h\|^2 = \|df(x)\cdot h\|^2-2\langle df(x)\cdot h, df(y)\cdot h\rangle+\|df(y)\cdot h\|^2 = \|h\|^2-2\langle h, h\rangle+\|h\|^2 = 0$$

c'est-à-dire que la différentielle de f est constante sur l'ouvert U_a.
On introduit alors l'ensemble $X = \{x \in E \quad | \quad df(x) = df(0)\}$ qui est fermé dans E car f est de classe $\mathcal{C}^1$. Ce qui précède montre que X est ouvert donc X est égal à E par connexité de ce dernier.
On note $u = df(0) \in \mathcal{O}(E)$. La fonction $f - u$ est de classe $\mathcal{C}^1$ de différentielle nulle sur E, elle est donc constante égale à un certain $a \in E$. Autrement dit f est une isométrie affine.

Recasages : 204, 214, 215 etc ?
Références : Analyse, Gourdon