

**Proposition.** Soit  $\Phi$  un automorphisme de  $S_n$  qui transforme les transpositions en transposition. Alors  $\Phi$  est un automorphisme intérieur.

*Démonstration.* On écarte tout de suite le cas  $n = 2$  qui est trivial (il n'y a que l'identité qui est bien intérieur).

Soit  $\Phi$  un tel automorphisme.  $S_n$  est engendré par les  $\tau_i = (1\ i)$ ,  $i \neq 1$ . Par hypothèse,  $\Phi(\tau_i)$  est une transposition, et si  $i \neq j$ ,  $\tau_i$  et  $\tau_j$  ne commutent pas, donc  $\Phi(\tau_2)$  et  $\Phi(\tau_3)$  ne commutent pas non plus. Leur support ne sont donc pas disjoints, l'intersection des supports doit posséder exactement un élément que l'on appelle  $\alpha_1$ . Si l'intersection est de cardinal 2, les support seraient égaux, et donc on aurait les mêmes transpositions, ce qui est absurde. Notons alors :

$$\Phi(\tau_2) = (\alpha_1\ \alpha_2), \quad \Phi(\tau_3) = (\alpha_1\ \alpha_3)$$

Soit  $3 < i \leq n$ ,  $\Phi(\tau_i)$  et  $\Phi(\tau_2)$  ne commutent pas, de même, leur support sont joints en un élément, s'il s'agit de  $\alpha_2$ , alors forcément les supports de  $\Phi(\tau_i)$  et  $\Phi(\tau_3)$  sont joints en  $\alpha_3$ . On a donc  $\Phi(\tau_i) = (\alpha_2\ \alpha_3)$ , or :

$$(\alpha_1\ \alpha_2)(\alpha_1\ \alpha_3)(\alpha_1\ \alpha_2) = (\alpha_2\ \alpha_3)$$

Soit, en appliquant  $\Phi^{-1}$  à cette égalité :

$$(2\ 3) = (1\ 2)(1\ 3)(1\ 2) = (1\ i)$$

ce qui est absurde. Donc le support de  $\Phi(\tau_i)$  contient  $\alpha_1$  et un autre élément  $\alpha_i$  qui n'est dans aucun autre des supports. On pose alors  $\alpha : i \mapsto \alpha_i$ . Cette application est injective par construction des  $\alpha_i$ , et donc  $\alpha \in S_n$ . De plus  $\Phi$  et  $int_\alpha$  coïncident sur la famille des  $\tau_i$  qui engendre  $S_n$ . Donc  $\Phi = int_\alpha$ .  $\square$

**Théorème.** Pour  $n \neq 6$ , tout automorphisme de  $S_n$  est intérieur

*Démonstration.* De même que précédemment, on écarte tout de suite le cas  $n = 2$  trivial.

Soit  $\Phi$  un automorphisme. On a une proposition qui nous dit qu'il suffit d'étudier les images des transpositions pour étudier  $\Phi$ . Soit donc  $\tau$  une transposition et  $\tau' = \Phi(\tau)$ . L'idée de la suite est d'étudier les propriétés des centralisateurs de  $\tau$  et  $\tau'$ . Avant même de commencer, on a facilement que  $c_\tau \simeq_\Phi c_{\tau'}$ .

**Étude de  $c_\tau$  :**

Si  $\tau = (i\ j)$ ,  $\sigma \in c_\tau \iff \sigma\tau\sigma^{-1} = \tau \iff (i\ j) = (\sigma(i)\ \sigma(j)) \iff \{i; j\} = \sigma(\{i; j\})$ . On peut alors construire :

$$r : \left( \begin{array}{c} c_\tau \rightarrow S_{n-2} \\ \sigma \mapsto \sigma|_{\{1, \dots, n\} \setminus \{i; j\}} \end{array} \right)$$

C'est un morphisme par stabilité de  $\{i; j\}$  par tout élément de  $c_\tau$ , et il est de plus surjectif car pour atteindre un élément  $\alpha$ , il suffit de l'étendre à  $\{1, \dots, n\}$  tout entier en posant par exemple  $\alpha(i) = i$  et  $\alpha(j) = j$ . On a de plus  $\ker r = \{id, \tau\}$ .

**Étude de  $c_{\tau'}$  :**

$\tau'$  est un élément d'ordre deux car  $\tau$  l'est. On a donc  $\tau' = \tau_1 \circ \dots \circ \tau_k$ , pour  $k \geq 1$  et les  $\tau_i$  des transpositions à supports disjoints. Naturellement,  $\tau_i \in c_{\tau'}$ . Donc  $N = \langle \tau_i, 1 \leq i \leq k \rangle \leq c_{\tau'}$  et de plus  $N \simeq \left(\frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}\right)^k$ . Soit  $\sigma \in c_{\tau'}$ ,  $\sigma\tau'\sigma^{-1} = \tau'$ , autrement dit :

$$(\sigma\tau_1\sigma^{-1})\dots(\sigma\tau_k\sigma^{-1}) = \tau_1\dots\tau_k$$

Par unicité de la décomposition en cycles à support disjoint, on en déduit que conjuguer par un élément de  $c_{\tau'}$  permute les  $\tau_i$ . Ainsi  $N \triangleleft c_{\tau'}$ .

**Bilan :**

$$\left(\frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}\right)^k \simeq N \triangleleft c_{\tau'} \simeq_\Phi c_\tau \twoheadrightarrow_r S_{n-2}$$

Qui plus est,  $\Phi(\ker r) = \{id, \tau'\} \triangleleft N$ . On peut donc quotienter l'égalité ci-dessus par  $\Phi(\ker r)$  à gauche et  $\ker r$  à droite. On obtient alors :

$$\left(\frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}\right)^{k-1} \simeq \frac{N}{\Phi(\ker r)} \triangleleft \frac{c_\tau}{\ker r} \simeq S_{n-2}$$

On a donc construit un sous groupe distingué de  $S_{n-2}$  de cardinal  $2^{k-1}$ . Connaissant les sous groupe distingués des  $S_N$ , on peut en déduire les seules possibilités :

- .  $k = 1$  et  $n \geq 3$  quelconque (correspond à  $\{id\}$  distingué dans  $S_{n-2}$ )
- .  $n = 4$  et  $k = 2$  ( $S_2$  distingué dans lui-même)
- .  $n = 6$  et  $k = 4$  (le sous groupe diédral de  $S_4$ )

Le dernier cas étant exclu par hypothèse, reste à traiter le deuxième cas. Dans ce cas,  $\tau'$  est une double transposition, et donc un élément de  $A_4$ . Or  $\Phi^{-1}$  est aussi un automorphisme, et donc  $\Phi^{-1}(A_4) = A_4$  (c'est un sous groupe distingué de même cardinal), et donc  $\Phi^{-1}(\Phi(\tau)) = \tau \in A_4$ , et c'est absurde. Ainsi, seul le cas 1 est possible, et la proposition précédente s'applique pour donner la conclusion voulue.  $\square$