253 Utilisation de la notion de convexité en analyse.

Soit $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, E un $\mathbb{K}$ev, $A\subset E$, $(H,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace de Hilbert.

I Utilisation des parties convexes

A Notion de partie convexe. Has 6.1

Définition 1: On dit que A est convexe si pour tout $x,y\in A$, pour tout $t\in[0,1]$ on a $tx+(1-t)y\in A$. [ANNEXE]

Exemple 2: i) Soit F sev de E. Alors pour tout $a\in E$, $a+F$ est un sous ensemble convexe de E.
ii) Les sous-ensembles convexes de l'espace vectoriel $\mathbb{R}$ sont les intervalles.

Proposition 3: Soient $A,B\subseteq E$ convexes. Alors :
i) Pour tout $m\in\mathbb{N}^*$, pour toute suite finie $x_1,\dots,x_m$ d'éléments de A et pour toute suite finie $t_1\geq0,\dots,t_m\geq0$ telle que $\sum_{i=1}^m t_i=1$, on a $\sum_{i=1}^m t_ix_i\in A$
ii) $\forall m\in\mathbb{N}^*$, on a $mA=A+\dots+A$ (m fois)
iii) Si $0\in A$, alors on a $tA\subset A$ pour tout $0\leq t\leq 1$.
iv) $\forall\lambda\in\mathbb{K}$, λA et $A+B$ sont convexes
v) Une intersection de sous ensembles convexes de E est convexe.

Remarque 4: Une réunion de convexe n'est pas forcément convexe. Par exemple dans $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}\times\{0\}$ et $\{0\}\times\mathbb{R}$ sont convexes mais pas leur réunion. Faire un schéma.

Proposition 5: $\forall a\in E$, $\forall r>0$, $B(a,r)$ est convexe.

B Théorème de projection et ses conséquences Li 2.2

$\boxed{\text{Développement}}$ (théorème de projection sur un convexe fermé) Soit $A\subseteq H$ convexe fermé non vide. Alors pour tout $x\in H$, il existe un unique $a\in A$ tel que $\|x-a\|=d(x,A)$. On dit que $a=P_A(x)$ est la projection de x sur A. Il est caractérisé par : $a\in A$ et $\mathrm{Re}\,(x-a,y-a)\leq0$ $\forall y\in A$.

Corollaire 6 : L'application $P_A:H\to A$ est continue, plus précisément on a :
$\forall x_1,x_2\in H$: $\|P_A(x_1)-P_A(x_2)\|\leq\|x_1-x_2\|$ 1-Lip

Corollaire 7: Si $F\subseteq H$ est un sev fermé, alors $p_F:H\to F$ est une application linéaire continue, et $p_F(x)$ est l'unique point $y\in F$ tel que :
$y\in F$ et $x-y\in F^\perp$
De plus on a $H=F\oplus F^\perp$.

Application 8: $F^{\perp\perp}=\overline{F}$ pour tout sev $F\subseteq H$.

Application 9: F sev de H est dense dans H si et seulement si $F^\perp=\{0\}$.

Exemple 10: $C_K(\mathbb{R})$ est dense dans $L^2(\mathbb{R})$ (K compact).

Théorème 11 (représentation de Riesz) Pour tout $\phi\in H^*$ (dual), il existe un unique $y\in H$ tel que $\phi(x)=(x|y)$ pour tout $x\in H$.

C En analyse complexe Tau 6.4

Théorème 12: Soit $U\subseteq\mathbb{C}$ ouvert convexe et $f:U\to\mathbb{C}$ telle que $\int_{\partial\Delta}f(z)\,dz=0$ pour tout triangle $\Delta\subseteq U$. Alors f possède une primitive sur U.

Lemme 13 (Goursat) Soit $U\subseteq\mathbb{C}$ ouvert, $w\in U$ et $f\in C(U)\cap H(U\setminus\{w\})$. Alors pour tout triangle $\Delta\subseteq U$, $\int_{\partial\Delta}f(z)\,dz=0$.

Théorème 14 (Cauchy) Soit $U\subseteq\mathbb{C}$ ouvert convexe, $w\in U$ et $f\in C(U)\cap H(U\setminus\{w\})$.
Alors f possède une primitive dans U et pour tout chemin fermé dans U on a $\int_\gamma f(z)\,dz=0$.

Corollaire 15: Soit γ chemin fermé dans $U\subseteq\mathbb{C}$ ouvert convexe, $z\in U\setminus\mathrm{Im}(\gamma)$ et $f\in H(U)$.
Alors : $f(z)\,\mathrm{Ind}_\gamma(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{f(u)}{u-z}\,du$.

II Utilisation de fonctions convexes

A Notion de fonction convexe J'inh 3.2 3.3

Soit par la suite $I\subset E$ convexe et $f:I\to\mathbb{R}$.

Définition 16 : On dit que f est convexe sur I si :
$\forall x_1, x_2 \in I^2\ \forall \lambda \in [0,1]$, $f(\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)$.
La fonction f est dite concave si $-f$ est convexe

Exemple 17 : i) Toute fonction affine est convexe.
ii) La fonction valeur absolue est convexe.
iii) $g : x \mapsto x^3$ n'est pas convexe sur $\mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$ est convexe sur $\mathbb{R}$

Propriété 18 : Soit f et g deux fonctions convexes sur I. Alors $f+g$ est convexe sur I.

Remarque 19 : le produit de deux fonctions convexes n'est pas forcément convexe

Proposition 20 : Soit $f : I \to J$, $g : J \to \mathbb{R}$ convexes. Si g est croissante alors $g \circ f$ est convexe.

Remarque 21 : Si g n'est pas croissante on ne peut rien déduire.

Proposition 22 : f est convexe si et seulement si son épigraphe est convexe

Proposition 23 : Si f est dérivable alors f est convexe si et seulement si f' est croissante. Si f est deux fois dérivable alors f est convexe si et seulement si $f'' \geq 0$.

Exemple 24 : On retrouve directement la convexité de la fonction $x \mapsto x^2$.

B Inégalités de convexité J'int 3.2 3.3 (X.G 2.3) +exo

Proposition 25 : Soient $a, b \in \mathbb{R}_+$ et $(p,q) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$
Alors $ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$

Théorème 26 (inégalité arithmético-géométrique) Pour tout $(x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}_+^m$
on a $(x_1 \cdots x_m)^{\frac{1}{m}} \leq \frac{1}{m}(x_1 + \dots + x_m)$

Application 27 (Hölder) Soit $(p,q) \in {\mathbb{R}_+^*}^2$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$
Pour tout nombres positifs réels $a_1, \dots, a_m$ et $b_1, \dots, b_m$ on a :
$$\sum_{i=1}^m a_i b_i \leq \left(\sum_{i=1}^m a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^m b_i^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

Application 28 (Minkowsky) Soient $p \geq 1$ réel et $x_1, \dots, x_m$, $y_1, \dots, y_m$ réels ≥ 0
Alors $$\left(\sum_{i=1}^m (x_i + y_i)^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^m x_i^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^m y_i^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

Propriété 29 : $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $\frac{2}{\pi} x \leq \sin x \leq x$.

Théorème 30 : Si f est convexe et $(\lambda_i)_{1 \leq i \leq p} \in {\mathbb{R}_+^*}$ tels que $\sum \lambda_i = 1$ alors
$\forall (x_1, \dots, x_p) \in I^p$ $f\left(\sum_{i=1}^p \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^p \lambda_i f(x_i)$

C Méthode de Newton avec une fonction convexe Rou exo 49

On considère $f : [c,d] \to \mathbb{R}$ C^2 avec $c < d$, $f(c) < 0 < f(d)$, $f' > 0$, $f'' > 0$

Lemme 31 : f admet un unique zero $a \in]c,d[$ et pour tout $x \in [c,d]$ il existe $z \in [a,x]$ tel que $F(x) - a := x - \frac{f(x)}{f'(x)} - a = \frac{1}{2} \frac{f''(z)}{f'(z)} (x-a)^2$

Lemme 32 : Il existe $C > 0$ tel que pour tout $x \in [c,d]$, $|F(x) - a| \leq C |x-a|^2$
et il existe $\alpha > 0$ tel que $I = [a-\alpha, a+\alpha]$ soit F-stable

Théorème 33 (Méthode de Newton) Soit $x_0 \in I$, alors $x_n \to a$ avec $F(x_n) = x_{n+1}$

Corollaire 34 : Puisque f est convexe, $I = [a,d]$ est F-stable et pour tout $x_0 \in I$ $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement décroissante (ou constante) avec :
$$0 \leq x_{n+1} - a \leq C(x_n - a)^2$$
$$x_{n+1} - a \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2} \frac{f''(a)}{f'(a)} (x_n - a)^2 \qquad (x_0 > a)$$

Application 35 : Soit $y \in \mathbb{R}_+^*$ et $f : x \mapsto x^2 - y$ convexe. Alors la méthode de Newton permet d'approcher $\sqrt{y}$.

D Minimisation de fonctionnelle quadratique Rom 5.15 En

On considère $A \in S_p^{++}(\mathbb{R})$ et $b \in \mathbb{R}^p$

Définition 36 : La fonctionnelle quadratique associée à A et b est
$$f(x) = \frac{1}{2} \langle Ax, x \rangle - \langle b, x \rangle$$

Lemme 37 : Soit $\alpha = \inf(Sp(A)) \in \mathbb{R}_+^*$, alors pour tout $x \in \mathbb{R}^p$
$\langle Ax, x \rangle \geq \alpha \|x\|^2$

Proposition 38 : La fonctionnelle quadratique précédente f est différentiable sur $\mathbb{R}^n$ et $\nabla f(x) = Ax - b$.

Corollaire 39 : Pour tout $x \in \mathbb{R}^p$, $H_f(x) = A \in S_p^{++}(\mathbb{R})$, donc f est strictement convexe.

Proposition 40 : f est coercive, i.e $f(x) \xrightarrow[\|x\| \to +\infty]{} +\infty$

Théorème 41 : La solution de $Ax = b$ réalise l'unique minimum global de la fonctionnelle f.

Développement Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $x_0 \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = x_n - \rho_n \nabla f(x_n)$ avec $\forall n \in \mathbb{N}$, $\rho_n = \underset{\rho \in \mathbb{R}_+^*}{\operatorname{argmin}} \left(f(x_n - \rho \nabla f(x_n)) \right)$, alors $x_n \to x_*$ avec $x_* \in \mathbb{R}^p$ l'unique minimum global de f.

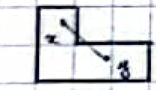
Application 42 : On peut donc approcher numériquement la solution $x \in \mathbb{R}^p$ de $Ax = b$.

Références :

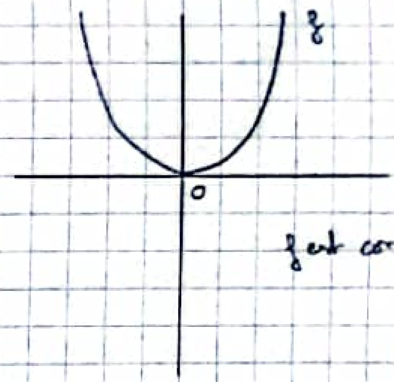
- Hassan Topologie générale et espaces normés   Has
- Daniel Li Cours d'analyse fonctionnelle   Li
- J'intègre MP-MP*   J'int
- Xavier Gourdon Analyse (Excellent ?)   X. G
- Rouvière petit guide de calcul différentiel   Rou
- Oraux X-ENS Analyse 4   Fra
- Rombaldi Analyse matricielle   Rom

Annexe :

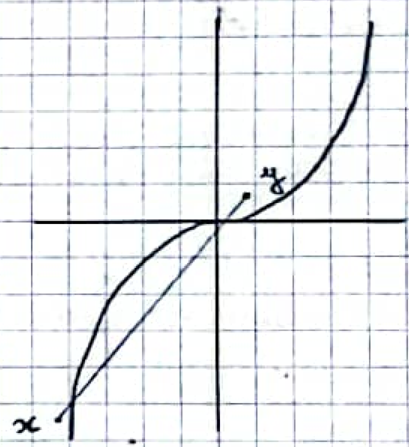
convexe



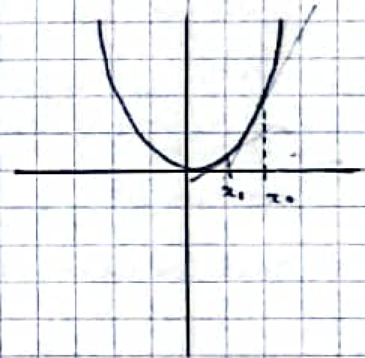
pas convexe



f est convexe



$x \mapsto x^3$ n'est pas convexe



Méthode de Newton cv vers 0.