245 : Fonctions d'une variable complexe. Exemples et applications.

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$, et $f : \Omega \to \mathbb{C}$

I Fonctions holomorphes

A Holomorphie Tau 5.2

Définition 1 : On dit que f est dérivable en $z_0 \in \Omega$ si

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(z_0+h) - f(z_0)}{h} \in \mathbb{C}$$

On note alors $f'(z_0)$ cette limite.
On dit que f est holomorphe sur Ω si f est dérivable en tout points de Ω.
On note $\mathcal{H}(\Omega)$ l'ensemble des fonctions holomorphes sur Ω.

Proposition 2 : $\mathcal{H}(\Omega)$ est une $\mathbb{C}$-algèbre. De plus, la composée de fonctions holomorphes est holomorphe. L'holomorphie est stable par passage à l'inverse.

Théorème 3 (Cauchy - Riemann)
Soit $z = x + iy \in \Omega$. Alors on a équivalence entre :
i) f est dérivable en z.
ii) f est différentiable en (x,y) et on a :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + i \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0$$

iii) Si f s'écrit $P + iQ$, alors P et Q sont différentiables et :

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y} \quad \text{et} \quad \frac{\partial P}{\partial y} = - \frac{\partial Q}{\partial x} \quad \text{(conditions de Cauchy Riemann)}$$

Exemple 4 :
1. Si f est polynomiale, alors f est holomorphe sur $\mathbb{C}$.
2. La fonction $z \mapsto |z|$ n'est pas holomorphe sur $\mathbb{C}$. (la conjugaison non plus)

Proposition 5 : Soient U un ouvert connexe de $\mathbb{C}$ et $f \in \mathcal{H}(U)$. Si f' est identiquement nulle sur U, alors f est constante.

Proposition 6 : Soient U un ouvert connexe de $\mathbb{C}$ et $f \in \mathcal{H}(U)$. On a équivalence entre :
i) f est constante sur U
ii) $\mathrm{Re}(f)$ est constante sur U
iii) $\mathrm{Im}(f)$ est constante sur U
iv) $|f|$ est constante sur U
v) $\bar{f} \in \mathcal{H}(U)$.

B Analyticité Tau 4.1 4.2 4.3

Définition 7 (série entière, fonction analytique)
On appelle série entière de la variable complexe toute série de fonctions $\sum f_n$, avec : $f_n : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ z \mapsto a_n z^n$
où $a_n \in \mathbb{C}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
On dit que f est analytique dans Ω si elle est développable en série entière en tout point de Ω. f est entière si $\Omega = \mathbb{C}$.

Exemple 8 : La fonction $z \mapsto e^z$ est analytique sur $\mathbb{C}$.

Proposition 9 : On note $\mathcal{A}(\Omega)$ l'ensemble des fonctions analytiques sur Ω. Alors $\mathcal{A}(\Omega)$ est une $\mathbb{C}$-algèbre. Toute fonction analytique sur Ω est indéfiniment dérivable sur Ω et ses dérivées sont analytiques. En particulier toute fonction analytique sur Ω est holomorphe sur Ω.

Proposition 10 : Si une série entière $\sum a_n z^n$ a un rayon de convergence $R > 0$, sa somme f est analytique sur le disque ouvert $D(0,R)$.

Théorème 11 (principe du prolongement analytique)
Soient U un ouvert connexe de $\mathbb{C}$, $a \in U$ et $f \in \mathcal{A}(U)$. On a équivalence entre :
i) f est identiquement nulle dans U
ii) f est identiquement nulle dans un voisinage de a.
iii) pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $f^{(n)}(a) = 0$.

Corollaire 12 : Soient U un ouvert connexe de $\mathbb{C}$ et $f, g \in \mathcal{A}(U)$. Si f et g coïncident au voisinage d'un point de U, on a $f = g$.

Théorème 13 : (principe des zéros isolés)
Soient U un ouvert connexe de $\mathbb{C}$ et $f \in \mathcal{A}(U)$ non nulle. L'ensemble $Z(f)$ des zéros de f est une partie localement finie de U. (ie pour tout compact $K \subset U$, $K \cap Z(f)$ est fini

Corollaire 14 : Si U est un ouvert connexe de $\mathbb{C}$, l'anneau $\mathcal{A}(U)$ est intègre.

II Intégrales sur des chemins

Tau 6.1 6.2 6.3 6.4 6.5 El A.

Définition 15 : On appelle arc toute application continue γ d'un intervalle compact $[a,b]$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$. On dit que $\gamma(a)$ est l'origine et $\gamma(b)$ est l'extrémité. L'arc est dit simple si γ est injective. On dit que γ est fermé quand $\gamma(a)=\gamma(b)$.
On appelle chemin dans un ouvert U tout arc $([a,b],\gamma)$ dans U tel que γ soit de classe C^1 par morceaux.

Exemple 16 :
i) Soient $z_0\in\mathbb{C}$ et $r\in\mathbb{R}_+^*$, l'application $[0,2\pi]\to\mathbb{C}$, $t\mapsto z_0+re^{it}$ est un chemin fermé.
ii) Soient $u,v\in\mathbb{C}$, l'application $[0,1]\to\mathbb{C}$, $t\mapsto(1-t)u+tv$ est un chemin.

Définition 17 : Soient $([a,b],\gamma)$ un chemin et f une fonction continue sur $\operatorname{im}\gamma$. L'intégrale sur γ, notée $\int_\gamma f(z)\,dz$ est définie par :
$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_a^b f(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,dt.$$

Théorème 18 : Soient U un ouvert de $\mathbb{C}$ et f une fonction continue sur U. Les conditions suivantes sont équivalentes
i) f possède une primitive dans U
ii) Pour tout chemin fermé γ dans U, on a $\int_\gamma f(z)\,dz=0$.

Théorème 19 : Soient U un ouvert convexe de $\mathbb{C}$ et f une fonction continue sur U telle que $\int_{\partial\Delta} f(z)\,dz=0$ pour tout triangle $\Delta\subset U$. Alors f possède une primitive dans U.

Théorème 20 (Goursat) Soient U, un ouvert de $\mathbb{C}$, $w\in U$ et f une fonction continue sur U et holomorphe dans $U\setminus\{w\}$. Pour tout triangle $\Delta\in U$ on a
$$\int_{\partial\Delta} f(z)\,dz=0$$

Théorème 21 (Cauchy) : Soient U un ouvert convexe de $\mathbb{C}$, $w\in U$ et f une fonction continue sur U et holomorphe dans $U\setminus\{w\}$. Alors f possède une primitive dans U et, pour tout chemin fermé γ dans U, on a :
$$\int_\gamma f(z)\,dz=0$$

Développement Soit $a>0$, alors pour tout $t\in\mathbb{R}$:
$$\mathcal{F}(e^{-ax^2})(t)=\sqrt{\frac{\pi}{a}}\exp\left(\frac{t^2}{4a}\right).$$
En particulier, la transformée de Fourier d'une gaussienne est une gaussienne.

Définition 22 : Soit γ un chemin fermé et $U=\mathbb{C}\setminus\operatorname{im}\gamma$. Alors on définit
$$\operatorname{ind}_\gamma(z)=\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma\frac{du}{u-z}$$
l'indice de z par rapport à γ.

Théorème 23 (Formule de Cauchy pour un convexe). Soit γ un chemin fermé dans un ouvert convexe U de $\mathbb{C}$, $z\in U\setminus\operatorname{im}\gamma$ et $f\in\mathcal{H}(U)$. Alors :
$$f(z)\operatorname{ind}_\gamma(z)=\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma\frac{f(u)}{u-z}\,du$$

Corollaire 24 : Si γ est un cercle de rayon r parcouru dans le sens direct et si $|z|<r$ on a :
$$f(z)=\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma\frac{f(u)}{u-z}\,du$$

Corollaire 25 : Soient U un ouvert convexe de $\mathbb{C}$, $a\in U\setminus\operatorname{im}\gamma$, γ un chemin fermé dans U et $f\in\mathcal{H}(U)$. Alors
$$f^{(n)}(a)\operatorname{ind}_\gamma(a)=\frac{n!}{2i\pi}\int_\gamma\frac{f(u)}{(u-a)^{n+1}}\,du\quad\forall n\in\mathbb{N}$$

III Propriétés des fonctions holomorphes

A Inégalités de Cauchy et ses conséquences

Tau 7.1 7.2

Théorème 26 (inégalités de Cauchy) Soit f une fonction holomorphe sur $D(0,R)$, on écrit $f(z)=\sum a_n z^n$ alors :
$$\forall r\in\,]0,R[,\ \forall n\in\mathbb{N},\ |a_n|=\frac{1}{n!}|f^{(n)}(0)|\leq\frac{1}{r^n}\sup\{|f(z)|,|z|=r\}$$

Corollaire 27 (Liouville) Toute fonction entière et bornée est constante.

Corollaire 28 (Alembert) Tout polynôme d'une variable à coefficients complexes et non constant a au moins une racine dans $\mathbb{C}$.

Proposition 29 (Formule de la moyenne) Soient $U\subset\mathbb{C}$ un ouvert et $f\in\mathcal{H}(U)$. Alors si $D(a,r)\subset U$, on a
$$f(a)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(a+re^{it})\,dt.$$

Théorème 30 : Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$ et f holomorphe sur U, alors si f atteint un maximum dans U, alors f est localement constante.

B Lemme de Schwarz et applications Tau 7.3

Théorème 31 (lemme de Schwarz). Soit $f \in \mathcal{H}(D(0,1))$ vérifiant $f(0)=0$ et $|f(z)|<1$ pour tout $z \in D(0,1)$. On a :
i) $|f(z)| \leq |z|$ pour tout $z \in D(0,1)$
ii) $|f'(0)| \leq 1$
En outre, si $|f'(0)|=1$ ou si il existe $z \in D(0,1)\setminus\{0\}$ tel que $|f(z)|=|z|$ alors il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ vérifiant $|\lambda|=1$ et $f(z)=\lambda z$, $\forall z \in D(0,1)$.

Théorème 32 : Si $a \in \mathbb{D}$ et $\lambda \in \mathbb{U}$, on pose $\varphi_{a,\lambda}(z) = \lambda \dfrac{a-z}{1-\bar{a}z}$.
Alors $\mathrm{Aut}(\mathbb{D}) = \{\varphi_{a,\lambda} \mid a \in \mathbb{D} \text{ et } \lambda \in \mathbb{U}\}$.

Application 33 : Soit $f \in \mathcal{H}(U)$ vérifiant $|f(z)|<1$ $\forall z \in \mathbb{D}$. Alors $\forall (u,v) \in \mathbb{D}^2$ on a
$$\left|\frac{f(u)-f(v)}{1-\overline{f(u)}f(v)}\right| \leq \left|\frac{u-v}{1-\bar{u}v}\right| \quad \text{et} \quad \frac{|f'(u)|}{1-|f(u)|^2} \leq \frac{1}{1-|u|^2}$$

C Holomorphie et intégration BMP

Théorème 34 (Holomorphie sous le signe intégrale)
Soit $(X,\mathcal{T},\mu)$ un espace mesuré et $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert et $f : U\times X \to \mathbb{C}$. On pose
$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad F(z) = \int_X f(z,x)\, d\mu(x). \quad \text{et on suppose que :}$$
i) $\forall z \in U$, $x \mapsto f(z,x)$ est mesurable
ii) $\exists N \subset X$, $\mu(N)=0$ telle que $\forall x \notin N$, $z \mapsto f(z,x)$ est holomorphe.
iii) pour tout $K \subset U$ compact, $\exists g \in L^1(X)$ tel que $|f(z,x)| \leq g(x)$ $\forall x \notin N$, $\forall z \in K$.
Alors F est holomorphe sur U et pour tout $z \in U$ et $m \in \mathbb{N}^*$,
$$F^{(m)}(z) = \int_X \frac{\partial^m f}{\partial z^m}(z,x)\, d\mu(x).$$

Exemple 35 : La fonction $\Gamma : z \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} dt$ est holomorphe sur $\{\mathrm{Re}(z)>0\}$.

Application 36 : Γ admet un unique prolongement méromorphe sur $\mathbb{C}$, holomorphe sur $\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}_-$. Celui ci ne s'annule pas et $\frac{1}{\Gamma}$ est une fonction entière.

IV Fonctions méromorphes

A Singularités isolées Tau 8.2

Définition 37 : Soient $a \in \mathbb{C}$ et $r>0$. On note $D^*(a,r) = D(a,r)\setminus\{a\}$ le disque

Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$, $a \in U$ et $f \in \mathcal{H}(U\setminus\{a\})$. On dit alors que f a une singularité isolée en a. Elle est illusoire si f se prolonge en une fonction holomorphe sur un voisinage de a.

Théorème 38 : Soit $f \in \mathcal{H}(U\setminus\{a\})$. Alors f vérifie une seule des propriétés :
i) f a une singularité illusoire en a
ii) Il existe une unique suite finie de nombres complexes $(a_{-1},\dots,a_{-m})$, avec $m \geq 1$ et $a_{-m} \neq 0$ telle que $z \mapsto f(z) - \sum_1^m \frac{a_{-k}}{(z-a)^k}$ ait une singularité illusoire en a.
On dit alors que a est un pôle d'ordre m et a_{-1} est le résidu de f en a.
iii) $\forall r>0$ tel que $D(a,r) \subset U$, $f[D^*(a,r)]$ est dense dans $\mathbb{C}$. On dit alors que f a une singularité essentielle en a.

B Calculs d'intégrales Tau 8.3 8.4

Définition 39 : Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$. Une fonction f sur U est dite méromorphe dans U s'il existe une partie localement finie A de U telle que $f \in \mathcal{H}(U\setminus A)$ et telle que tout point de A soit un pôle de f. On note $\mathcal{M}(U)$ l'ensemble des fonctions méromorphes dans U.

Théorème 40 (des résidus) : Soient U un ouvert convexe de $\mathbb{C}$, $a_1,\dots,a_m$ des points deux à deux distincts de U et $f \in \mathcal{H}(U\setminus\{a_1,\dots,a_m\})$. On suppose que chaque a_k est un pôle de f. Si γ est un chemin fermé dans U dont l'image ne contient aucun des a_k, on a :
$$\int_\gamma f(z)\,dz = 2i\pi \sum_{k=1}^m \mathrm{ind}_\gamma(a_k)\,\mathrm{res}(f,a_k)$$

Exemple 41 :
$$I = \int_0^{2\pi} \frac{dt}{a+\cos t} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2-1}}$$
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \pi$$

Développement En utilisant le théorème des résidus on trouve que
$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt = \frac{\pi}{2} \quad \text{(Intégrale de Dirichlet.)}$$

<u>Références :</u>

Analyse complexe pour la licence 3 Tauvel

Objectif Agrégation BMP

Série de Fourier El Amrani

Annexe :

Tracer les contours, les chemins