234 : Fonctions et espaces de fonctions Lebesgue-intégrables

Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ espace mesuré, $\mathcal{M}^+(\mathcal{A}) = \{ f : X \to \overline{\mathbb{R}_+},\ f \text{ mesurable} \}$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

I Espaces de Lebesgue $L^p(\mu)$.

A Espace vectoriel $\mathcal{L}^1(\mu)$. BP 7.1 7.2

Définition 1 : On dit que $f : X \to \mathbb{R}_+$ est étagée si f prend un nombre fini de valeurs $f = \sum_{\alpha \in f(X)} \alpha \mathbb{1}_{\{f = \alpha\}}$. Dans ce cas on appelle intégrale de f par rapport à la mesure μ :
$$\int_X f \, d\mu = \sum_{\alpha \in f(X)} \alpha \, \mu(\{f = \alpha\}) \in \overline{\mathbb{R}_+}$$

On note $E_{\mathbb{R}_+}(\mathcal{A})$ l'ensemble des fonctions étagées positives. On dit que $f \in \mathcal{M}^+(\mathcal{A})$ est μ-intégrable si $\int_X f \, d\mu < +\infty$

Théorème 2 (convergence monotone) Soit $(f_n) \in \mathcal{M}^+(\mathcal{A})$ suite croissante. Alors
$f := \lim f_n \in \mathcal{M}^+(\mathcal{A})$ et $\int_X f \, d\mu = \lim \int_X f_n \, d\mu \in \overline{\mathbb{R}_+}$.

Lemme 3 (Fatou) Soit $(f_n) \in \mathcal{M}_+(\mathcal{A})$, alors.
$$0 \leq \int_X \underline{\lim}\, f_n \, d\mu \leq \underline{\lim} \int f_n \, d\mu \leq +\infty$$

Définition 4 : Une fonction $f : X \to \mathbb{K}$ est μ-intégrable si $|f|$ est μ-intégrable.
On note $\mathcal{L}^1(\mu) = \{ f : X \to \mathbb{K},\ f \text{ mesurable et } \mu\text{-intégrable} \}$.

Remarque 5 : $\|f\|_1 = \int_X |f| \, d\mu$ est une semi norme sur $\mathcal{L}^1(\mu)$.

Proposition 6 : $\forall f \in \mathcal{L}^1(\mu)$, $\left| \int_X f \, d\mu \right| \leq \int_X |f| \, d\mu$ avec égalité ssi $\exists \alpha \in \mathbb{U}$ tel que $f = \alpha |f|$ μ pp.

Théorème 7 (convergence dominée). Soit $(f_n) \in \mathcal{L}^1(\mu)$ telle que f_n converge vers f μ pp et il existe $g \in \mathcal{L}^1(\mu)$, telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|f_n| \leq g$ μ.p.p
Alors f_n converge vers $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$ et $\lim \int_X f_n \, d\mu = \int_X f \, d\mu$.

Application 8 : (Théorème de continuité sous le signe intégrale) Soit $f : E \times X \to \mathbb{K}$ telle que
i) $\forall u \in E$, $x \mapsto f(u, x)$ est mesurable sur X.
ii) pour presque tout $x \in X$, $u \mapsto f(u, x)$ est continue sur E.
iii) $\exists g \in \mathcal{L}^1(\mu)$, $\forall u \in E$, $|f(u,x)| \leq g(x)$ μ pp.

Alors $F(u) := \int_X f(u, x) \, d\mu(x)$ est continue sur E

B Espace vectoriel $\mathcal{L}^p(\mu)$ BP 9.1 9.2

Définition 9 : Soit $p > 0$. On définit $\mathcal{L}^p(\mu) := \{ f : X \to \mathbb{K},\ f \text{ mesurable},\ \int |f|^p d\mu < \infty \}$

Exemple 10 : Si $(X, \mathcal{A}, \mu) = (\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), m)$ avec m la mesure de comptage alors
$\mathcal{L}^p(m) = \{ (a_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}},\ \sum |a_n|^p < +\infty \}$

Proposition 11. $\forall p > 0$, $\mathcal{L}^p(\mu)$ est un $\mathbb{K}$ev.

Proposition 12 : Si $\mu(X) < +\infty$ alors $0 < p \leq q \Rightarrow \mathcal{L}^q(\mu) \subset \mathcal{L}^p(\mu)$

Notation 13 : On note $\|f\|_p = \left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}$

Lemme 14 (inégalité de Young) Soit $\alpha \in]0,1[$, $u, v \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^*$.
Alors $u^\alpha v^{1-\alpha} \leq \alpha u + (1-\alpha) v$ avec égalité ssi $u = v$.

Théorème 15 (Hölder) Soit $f, g : X \to \mathbb{K}$ mesurables, $p, q \in]1, +\infty[$ tq $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ et $f \in \mathcal{L}^p(\mu)$, $g \in \mathcal{L}^q(\mu)$. Alors $fg \in \mathcal{L}^1(\mu)$ et $\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q$

Développement (Minkowsky) Soit $p \in [1, +\infty[$, f et $g \in \mathcal{L}^p(\mu)$.
Alors $\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$, avec égalité ssi $\begin{cases} f = 0 \ \mu\text{pp ou } g = \alpha f \\ f\bar{g} \geq 0 \ \mu\text{pp} \end{cases}$

Remarque 16 : $\| \ \|_p$ est une semi norme sur $\mathcal{L}^p(\mu)$.

C Espace vectoriel quotient normé $L^p(\mu)$. BP 9.3

Définition 17 : On définit pour $p \in [1, +\infty[$, l'ensemble quotient :
$L^p(\mu) = \mathcal{L}^p(\mu)/\sim$ pour $f \sim g$ ssi $\|f - g\|_p = 0$.

Proposition 18 : pour $p \in [1, +\infty[$, $(L^p(\mu), \|\ \|_p)$ est un $\mathbb{K}$evn.

Lemme 19 : Soit $(f_n) \in \mathcal{L}^p(\mu)$ suite de fonctions positives. Alors pour tout $p \in [1, +\infty[$
$\|\sum f_n\|_p \leq \sum \|f_n\|_p \leq +\infty$.

Lemme 20 : Un $\mathbb{K}$evn E est de Banach (ie complet) ssi toute série absolument

Théorème 21 (Riesz-Fisher) Pour tout $p \in [1, +\infty[$, $(L^p(\mu), \|\cdot\|_p)$ est complet (ie toute suite de Cauchy pour la norme $\|\cdot\|_p$ converge pour cette norme)

Corollaire 22: Soit $(f_n) \in \mathcal{L}^p(\mu)$, $f \in \mathcal{L}^p(\mu)$ telle que $f_n \to f$.
Alors il existe $(f_{\varphi(n)})$ sous suite extraite et $g \in \mathcal{L}^p(\mu)$ telle que :
$\forall n \in \mathbb{N}$, $|f_{\varphi(n)}| \leq g$ μ p.p et $f_{\varphi(n)} \xrightarrow[+\infty]{} f$ μ pp.

II Densité dans les espaces $L^p(\mu)$

A Densité avec les fonctions continues BP 5.3 9.4 9.5

Lemme 23 (fondamental d'approximation) Soit f mesurable. Alors il existe (f_n) suite de fonctions étagées, telle que, pour tout $x \in X$, $\lim f_n(x) = f(x)$.
i) Si de plus $f \geq 0$, (f_n) est croissante et positive.
ii) Si f est bornée, $\lim \|f_n - f\|_\infty = 0$

Proposition 24: Pour tout $p \in [1, +\infty[$. L'ensemble des fonctions étagées intégrables est dense dans $L^p(\mu)$.

Lemme 25: Soit $C \subset D \subset \mathcal{L}^p(\mu)$ tel que $\overline{C} = D$ et $\overline{D} = \mathcal{L}_p(\mu)$. Alors $\overline{C} = \mathcal{L}_p(\mu)$.

Théorème 26: i) L'ensemble des fonctions en escalier à support compact est dense dans tous les espaces $L^p(\lambda)$, $p \in [1, +\infty[$
ii) L'ensemble $C_c(\mathbb{R})$ des fonctions continues à support compact est dense dans tous les espaces $L^p(\lambda)$, $p \in [1, +\infty[$

Théorème 27: L'ensemble des fonctions étagées est dense dans $L^\infty(\mu)$

B Convolution dans $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \lambda_d)$ BP 14.2 14.3

Définition 28: Soient $f, g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}_+$ boréliennes. La convolée de f et g est telle que : $\forall x \in \mathbb{R}^d$, $f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y) g(y) \lambda_d(dy)$.

Proposition 29: i) La fonction $f * g$ est bien définie, borélienne, positive de $\mathbb{R}^d$ dans $\overline{\mathbb{R}}_+$ vérifiant : $\int_{\mathbb{R}^d} f * g \, d\lambda_d = (\int_{\mathbb{R}^d} f \, d\lambda_d)(\int_{\mathbb{R}^d} g \, d\lambda_d)$.

ii) La convolution est commutative $f * g = g * f$ et associative $(f * g) * h = f * (g * h)$.

Remarque 30: La convolution n'est pas associative en général. Considérer $f := 1_{\mathbb{R}_+}$, $g := 1_{[-1,0]} - 1_{[0,1]}$ et $h := 1$

Théorème 31: Soit $f \in \mathcal{L}^p(\lambda_d)$, $g \in \mathcal{L}^q(\lambda_d)$, $p, q \in [1, +\infty]$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.
Alors i) $f * g$ est bien définie sur $\mathbb{R}^d$, uniformément continue et bornée par $\|f\|_p \|g\|_q$.
et $(f, g) \mapsto f * g$ est bilinéaire.
ii) Si de plus $1 < p, q < +\infty$ alors $\lim_{|x| \to +\infty} f * g(x) = 0$.

Théorème 32: i) Soit $f, g \in \mathcal{L}^1(\lambda_d)$. Alors $f * g$ est définie λ_d pp, $f * g \in L^1(\lambda_d)$ et $\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$ et $\int_{\mathbb{R}^d} f * g \, d\lambda_d = \int_{\mathbb{R}^d} f \, d\lambda_d \times \int_{\mathbb{R}^d} g \, d\lambda_d$

ii) $(L^1(\lambda_d), +, \cdot)$ muni de $*$ est une $\mathbb{K}$-algèbre commutative, sans unité.

C Densité avec les fonctions $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ BP 14.4 14.5

Définition 33: On dit que $(\alpha_n) \in L^1(\lambda_d)$ est une approximation de l'unité si : i) $\forall n \geq 1$, $\int_{\mathbb{R}^d} \alpha_n \, d\lambda_d = 1$ ii) $\sup_{n \geq 1} \int_{\mathbb{R}^d} |\alpha_n| \, d\lambda_d < +\infty$ iii) $\forall \varepsilon > 0$, $\lim \int_{|x| \geq \varepsilon} |\alpha_n| \, d\lambda_d = 0$.

Exemple 34: Pour $\alpha \in L^1(\lambda_d)$ tq $\int_{\mathbb{R}^d} \alpha \, d\lambda_d = 1$, $(\alpha_n : x \mapsto n^d \alpha(nx))_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une approximation de l'unité.

Théorème 35 Soit (α_n) une suite d'approximations de l'unité, $p \in [1, +\infty[$ et $f \in L^p(\lambda_d)$. Alors :
$\forall n \geq 1$, $f * \alpha_n \in L^p(\lambda_d)$ et $f * \alpha_n \xrightarrow{\|\cdot\|_p} f$

Théorème 36: Si $f \in L^\infty(\lambda_d)$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}^d$ alors $\lim \|f * \alpha_n - f\|_\infty = 0$

Définition 37: Une suite (α_n) est dite régularisante si :
i) La suite (α_n) est une approximation de l'unité.
ii) $\forall n \geq 1$, $\alpha_n \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$.

Exemple 38: Pour $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$, on pose $\alpha = \frac{\varphi}{\int_{\mathbb{R}^d} \varphi \, d\lambda_d}$ et $(\alpha_n : x \mapsto n^d \alpha(nx))_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite régularisante.

Théorème 39: $\forall p \in [1, +\infty[$, $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ est dense dans $L^p(\lambda_d)$ (pour $\|\cdot\|_p$).

III Etude du cas particulier L^2.

A Polynômes orthogonaux et bases hilbertiennes de $L^2(I,\rho)$. BHP 3.1.5

Définition 40: Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. On appelle fonction poids une fonction $\rho : I \to \mathbb{R}$ mesurable, strictement positive et telle que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\int_I |x|^n \rho(x)\,dx < +\infty$.
On note $L^2(I,\rho)$ l'espace des fonctions de carré intégrable pour la mesure de densité ρ par rapport à la mesure de Lebesgue ie muni du produit scalaire $\langle f,g\rangle_\rho = \int_I f(x)\overline{g(x)}\rho(x)\,dx$.

Proposition 41: $(L^2(I,\rho), \langle\cdot,\cdot\rangle_\rho)$ est un espace de Hilbert.

Théorème 42: Il existe une unique famille (P_n) de polynômes unitaires orthogonaux deux à deux tels que $\deg P_n = n$. Cette famille s'appelle la famille des polynômes orthogonaux associée à la fonction poids ρ.

Exemple 43: i) Si $I = \mathbb{R}$ et $\rho(x) = e^{-x^2}$, on appelle polynôme de Hermite :
$P_0 = 1$, $P_1 = X$, $P_2 = X - \frac{1}{2}$, ..., $P_n(x) = \frac{(-1)^n}{2^n} e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2})$

ii) Si $I = [-1,1]$ et $\rho(x) = 1$ on appelle polynôme de Legendre :
$P_0 = 1$, $P_1 = X$, $P_2 = X - \frac{1}{3}$, ..., $P_n(X) = \frac{n!}{(2n)!} \frac{d^n}{dx^n}((x^2-1)^n)$

$\boxed{\text{Développement}}$ Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et ρ une fonction poids. S'il existe $\alpha > 0$ tel que $\int_I e^{\alpha|x|}\rho(x)\,dx < +\infty$ alors la famille des polynômes orthogonaux associée à ρ forme une base hilbertienne de $L^2(I,\rho)$ pour la norme $\|\cdot\|_\rho$.

Remarque 44: L'hypothèse sur ρ est cruciale. Pour $I = \mathbb{R}_+^*$, $w(x) = x^{-\ln x}$ la famille des polynômes orthogonaux associée à w ne forment pas une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{R}_+^*, w)$ (prendre $f(x) = \sin(2\pi \ln(x))$).

B Transformation de Fourier sur $L^2(\mathbb{R})$ Li 3.2.3 + exos

Définition 45: $A(\mathbb{R}) = \{ f \in L^1(\mathbb{R}),\ \hat{f} \in L^1(\mathbb{R}) \}$.

Proposition 46: i) $f \in A(\mathbb{R}) \Rightarrow \hat{f} \in A(\mathbb{R})$
ii) $f \in A(\mathbb{R}) \Rightarrow f$ et $\hat{f} \in L^2(\mathbb{R})$.
iii) $A(\mathbb{R}) \subset L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$
iv) $f \in A(\mathbb{R}) \Rightarrow \|\hat{f}\|_2 = \|f\|_2$.
v) $A(\mathbb{R})$ est dense dans $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ avec la norme $\|\cdot\|_2$

Lemme 47: Si $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ alors $\int_{\mathbb{R}} f\hat{g} = \int_{\mathbb{R}} \hat{f} g$.

Théorème 48: (Plancherel) La transformation de Fourier $\mathcal{F}$, définie sur $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ se prolonge de façon unique en un isomorphisme d'espaces de Hilbert de $L^2(\mathbb{R})$ sur lui-même.

Remarque 49: Soit $f \in L^2(\mathbb{R})$, alors $\hat{f}$ ne peut pas se calculer directement à priori.

Proposition 50: Pour $f \in L^2(\mathbb{R})$ posons $\varphi_A(y) = \int_{-A}^{A} f(x) e^{-2i\pi xy}\,dx$. Alors:
$\lim_{A\to+\infty} \|\varphi_A - \mathcal{F}f\|_2 = 0$

Proposition 51: Pour $f \in L^2(\mathbb{R})$ posons $\psi_A(x) = \int_{-A}^{A} (\mathcal{F}f)(y) e^{2\pi ixy}\,dx$
alors $\lim_{A\to+\infty} \|\psi_A - f\|_2 = 0$

Corollaire 52: Si $f \in L^2(\mathbb{R})$ et $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$, alors :
$$f(x) = \int_{\mathbb{R}} (\mathcal{F}f)(y) e^{2\pi ixy}\,dy.$$

Exemple 53: Soit $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ alors $\mathcal{F}\left(\frac{\sin(2\pi\lambda x)}{2\pi\lambda x}\right)(y) = \frac{1}{2\lambda} \mathbb{1}_{[-\lambda,\lambda]}(y)$

Références :

- Briane Pagès Analyse - Théorie de l'intégration BP
- Beck Malick Peyré Objectif Agrégation BMP
- Daniel Li Cours d'analyse fonctionnelle Li