22-1 : Equations différentielles linéaires. Systèmes d'équations différentielles linéaires. Exemples et applications.

Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, $m, N \in \mathbb{N}^*$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}\times(\mathbb{K}^N)^m$ ouvert et $f : \Omega \to \mathbb{K}^N$, I intervalle de $\mathbb{R}$.

I Théorie des équations différentielles linéaires.

A Existence et unicité des solutions   Ber 1.2 3.2

Définition 1 : On dit que l'équation $y' = f(t,y)$ est une équation différentielle linéaire si $f(t,y) = A(t)\, y + B(t)$ où A et B sont des fonctions du temps à valeurs respectives dans $M_N(\mathbb{K})$ et $\mathbb{K}^N$. Les autres formes d'équations différentielles sont qualifiées de non linéaires.
déf équation diff lin homo

Définition 2 : On dit que f est globalement lipschitzienne par rapport à y uniformément par rapport à t si pour tout intervalle compact $J \subset I$, il existe $k > 0$ tel que $\forall (t, y_1), (t, y_2) \in J \times X$:
$$\|f(t,y_1) - f(t,y_2)\| \leq k \|k_1 - k_2\|.$$

Lemme 3 : Soit $(t_0, y_0, \alpha, \beta) \in \mathbb{R}\times\mathbb{K}^N\times[0,+\infty[$ $(\alpha,\beta) \neq (0,0)$ et $r_0 \in]0,+\infty]$. Posons $I = [t_0 - \alpha, t_0 + \beta]$, soit $f : I \times \bar{B}(y_0, r_0) \to \mathbb{K}^N$ continue et globalement lipschitzienne par rapport à y uniformément par rapport à t. On définit pour $y \in \tilde{E} = C(I, \bar{B}(y_0, r_0))$ la fonction $\Phi(y)$ sur I par $\Phi(y)(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(s, y(s))\, ds$. On suppose que $\Phi(y) \in \tilde{E}$ pour tout $y \in \tilde{E}$. Alors il existe une unique solution globale $y : I \to \mathbb{K}^N$ de $y' = f(t,y)$, $y_0 = y(t_0)$.

NLPT 1

Théorème 4 (Cauchy-Lipschitz globalement lipschitzien) Si f continue et globalement lipschitzienne par rapport à y alors il existe une unique solution globale de $y' = f(t,y)$, $y(t_0) = y_0$.

Corollaire 5 (Cauchy lipschitz linéaire) Soient $A \in C(I, M_N(\mathbb{K}))$, $B \in C(I, \mathbb{K}^N)$, $(t_0, y_0) \in I \times \mathbb{K}^N$. Alors il existe une solution et une seule $y : I \to \mathbb{K}^N$ de :
$$y' = A(t)\, y + B(t), \quad y(t_0) = y_0.$$

Exemple 6 : $y' = -yx$, $y(0) = 0$ admet une unique solution

B Structure de l'espace des solutions de l'équation homogène   Ber 2.3

Proposition 7 : Soit $A \in C(I, M_N(\mathbb{K}))$. Alors l'ensemble S_H des solutions maximales

Corollaire 8 : Soient $A \in C(I, M_N(\mathbb{K}))$ et $B \in C(I, \mathbb{K}^N)$. L'ensemble des solutions S de $y' = A(t)\, y + B(t)$ est un $\mathbb{K}$ espace affine de direction S_H.

Remarque 9 : On peut retenir : "solution générale = solution générale homogène + solution particulière".

Exemple 10 : Les solutions de $y'' - 2y' + y = 0$ sont de la forme $y(t) = a e^t + b t e^t$, $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.

Proposition 11 : Si $N = 1$ alors la solution globale de $y' = a(t)\, y + b(t)$, $y(t_0) = y_0$ est $y(t) = y_0 \exp\left(\int_{t_0}^t a(s)\, ds\right) + \int_{t_0}^t b(s) \exp\left(\int_s^t a(\sigma)\, d\sigma\right) ds$

Exemple 12 : Les solutions de $y' = 2y + 1$ sont de la forme $y(t) = C_0 e^{2t} - \frac{1}{2}$, $C_0 \in \mathbb{K}$.

C Matrice fondamentale et Wronskien   Ber 2.4

Définition 13 : Un système fondamental de solutions de l'équation différentielle $y' = A(t)\, y$ est une famille $(y_1, \dots, y_N)$ de N solutions indépendantes de $y' = A(t)\, y$. La matrice $\Phi(t) = (y_1(t) \dots y_N(t))$ constituée de ces N solutions écrites comme des vecteurs colonnes est appelée matrice fondamentale et $\det(\Phi(t))$ est appelé Wronskien de ce système fondamental.

Proposition 14 : Soit $(y_1, \dots, y_N)$ un système fondamental de solutions et y solution de $y' = A(t)\, y$. Alors il existe des constantes $C_1, \dots, C_N \in \mathbb{K}$ telles que
$$y = C_1 y_1 + \dots + C_N y_N = \Phi(t)\, C, \quad C \in \mathbb{K}^N$$

Corollaire 15 : Soit Φ matrice fondamentale de $y' = A(t)\, y$, alors la solution de $y' = A(t)\, y$, $y(t_0) = y_0$ s'écrit $y(t) = \Phi(t)\, \Phi(t_0)^{-1} y_0$, $t \in I$

Exemple 16 : Une matrice fondamentale pour $y'' - 2y' + y = 0$ est
$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} e^t & te^t \\ e^t & (t+1)e^t \end{pmatrix}$$
et le wronskien est $\det(\Phi(t)) = e^{2t}$.
Si de plus $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$ alors la solution est $y(t) = (1+t)e^t$.

II Résolution explicite

A Cas des coefficients constants Ber 2.4 2.7 2.6

On considère $A \in M_N(\mathbb{K})$

Proposition 17 : Une matrice fondamentale pour $y' = Ay$ est $\phi(t) = e^{tA}$.
Les solutions de $y' = Ay$ sont les $y(t) = e^{tA} C$ où $C \in \mathbb{K}^N$. Pour $(t_0, y_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{K}^N$ la solution de $y' = Ay$, $y_0 = y(t_0)$ est $y(t) = e^{(t-t_0)A} y_0$.

Proposition 18 : Les solutions de $\begin{cases} y' = Ay + B(t) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$ sont les $y(t) = e^{(t-t_0)A} y_0 + \int_{t_0}^{t} e^{(t-s)A} B(s)\, ds$.

Proposition 19 : Soit $y'' + a_1 y' + a_0 y = 0$ (E) $(a_1, a_0) \in \mathbb{R}^2$.
On note $P(X) = X^2 + a_1 X + a_0$ le polynôme caractéristique.
i) Si P admet deux racines $r_1 \neq r_2 \in \mathbb{R}$ alors les solutions réelles de (E) sont de la forme $y(t) = \lambda e^{r_1 t} + \mu e^{r_2 t}$ avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
ii) Si P admet une racine réelle double r, alors $y(t) = (\lambda t + \mu) e^{rt}$ $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
iii) Si P admet deux racines complexes $r_1 = \rho + i\sigma$ et $r_2 = \rho - i\sigma$ avec $(\rho, \sigma) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ alors
$y(t) = e^{\rho t}(\alpha \cos(\sigma t) + \beta \sin(\sigma t))$ $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Exemple 20 : Les solutions de $y'' - 3y' - 4y = 0$ sont de la forme
$y(t) = \lambda e^{-t} + \mu e^{4t}$ avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

B Cas des coefficients non constants et méthode de la variation des constantes Ber 2.6

Remarque 21 : Il n'existe pas de méthode générale pour résoudre une équation différentielle homogène mais à partir d'un système fondamental de solutions on peut résoudre l'équation différentielle.

Proposition 22 : Soit ϕ matrice fondamentale de $y' = A(t)y$, alors on cherche une solution de $y' = A(t)y + B(t)$ de la forme $y(t) = \phi(t) C(t)$ avec $C : I \to \mathbb{K}^N$

Corollaire 23 : Soit ϕ matrice fondamentale de $y' = A(t)y$ alors la solution de $\begin{cases} y' = A(t)y + B(t) \\ y_0 = y(t_0) \end{cases}$ est $y(t) = \phi(t)\phi(t_0)^{-1} y_0 + \int_{t_0}^{t} \phi(t)\phi(s)^{-1} B(s)\, ds$.

Exemple 24 : Soient $(a_0, a_1, b) \in C(I, \mathbb{C})$ et $y'' + a_1(t) y' + a_0(t) y = b(t)$ (E)
Soient y_1 et y_2 deux solutions indépendantes de l'équation homogène associée.
Alors les solutions de (E) sont de la forme $y(t) = \lambda(t) y_1(t) + \mu(t) y_2(t)$ où
$\lambda'(t) y_1 + \mu'(t) y_2 = 0$ et $\lambda'(t) y_1' + \mu'(t) y_2' = 0$

Exemple 25 : La solution de $\begin{cases} y'' - 2y' + y = e^t \\ y(-1) = 0 \text{ et } y'(-1) = 1 \end{cases}$ est $y(t) = (\frac{t^2}{2} + 1)(t+1) + e + \frac{1}{2})e^t$

C Utilisation des séries entières QZ 10.6.3 J'int 11.4

Remarque 26 : Il est souvent judicieux de chercher des solutions particulières d'équations différentielles sous forme de série entière, notamment lorsque les fonctions coefficients sont des polynômes.

Théorème 27 : On suppose que $p(x) = \sum_0^{\infty} p_n x^n$ et $q(x) = \sum_0^{\infty} q_n x^n$, les séries convergent pour $|x| < R$. Alors pour tout $(a_0, a_1) \in \mathbb{K}^2$ $y'' + py' + qy = r$ a une unique solution telle que $y(0) = a_0$ et $y'(0) = a_1$, y étant dse sur $]-R, R[$.

$\boxed{\text{Développement}}$ La fonction $\varphi : t \mapsto \cos(\alpha \operatorname{Arcsin} t)$ $\alpha \in \mathbb{R}$ est développable en série entière sur $]-1, 1[$.

Application 28 : Arcsin^2 est dse sur $]-1, 1[$ et $\forall t \in]-1, 1[$ $\operatorname{arcsin}^2 t = \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{2^{2m-1} (m-1)!^2}{(2m)!} t^{2m}$

III Etude qualitative et stabilité.

A Points stationnaires et solutions stables. Ber 5.1 5.4 6.1

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert et $f : \Omega \to \mathbb{R}^N$ $g : I \times \Omega \to \mathbb{K}^N$

Définition 29 : Une équation différentielle autonome est une équation différentielle de la forme $y' = f(y)$

Définition 30 : Etant donnée $y' = g(t, y)$, $y^* \in \Omega$ est dit stationnaire si $f(t, y^*) = 0$ $\forall t \in I$.

Exemple 31 : si $f(y) = Ay$ avec A inversible alors l'unique point stationnaire est $y = 0$

On suppose en plus g continue et localement lipschitzienne par rapport à y.

Définition 32 : La solution y_{t_0,y_0} est stable à droite si :

i) $\exists \alpha > 0$, $\forall y_1 \in \Omega$, $\|y_1 - y_0\| \leq \alpha \Rightarrow y_{t_0,y_1}(t)$ est définie $\forall t \geq t_0$.

ii) $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \eta \in]0,\alpha]$, $\forall y_1 \in \Omega$, $\|y_1 - y_0\| \leq \eta \Rightarrow \|y_{t_0,y_1}(t) - y_{t_0,y_0}(t)\| \leq \varepsilon$ $\forall t \geq t_0$

Définition 33 : La solution $y_{t_0,y_0}(t)$ est attractive (à droite) si $\exists \delta > 0$, $y_{t_0,y_1}(t) - y_{t_0,y_0}(t) \xrightarrow[+\infty]{} 0$ $\forall y_1 \in \Omega$ tel que $\|y_1 - y_0\| \leq \delta$.

Définition 34 : La solution y_{t_0,y_0} est dite asymptotiquement stable (à droite) si elle est stable (à droite) et attractive (à droite).

Remarque 35 : La notion de stabilité peut se comprendre en disant qu'une solution est stable si de petites perturbations des CI conduisent à de faibles variations des valeurs de la solution pour des temps ultérieurs. La notion de stabilité asymptotique demande, en plus de rester proche, que la solution perturbée revienne quand on tend vers l'infini vers la solution donnée.

Exemple 36 : Soit $y' = y$, alors pas stable à droite mais asymptotiquement stable à gauche.

B Cas des systèmes linéaires à coefficients constants dans $\mathbb{R}^2$. Ber 5.4

On considère $A \in M_2(\mathbb{K})$ et y solution de $y' = Ay$.

Proposition 37 : Si A a deux valeurs propres réelles λ et μ alors $y(t) = C_1 e^{\lambda t} v_1 + C_2 e^{\mu t} v_2$ où v_1, v_2 vecteurs propres associés à λ, μ et $(C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2$.

Corollaire 38 : Dans ce cas si :

i) $\lambda, \mu > 0$ alors 0 est un point d'équilibre instable

ii) $\lambda, \mu < 0$ alors 0 est asymptotiquement stable

iii) λ et μ de signes contraires alors 0 est un point selle. (instable).

iv) si $\lambda = \mu < 0$ alors 0 est attractif, si $\lambda = \mu > 0$, 0 est répulsif.

Proposition 39 : Si A a deux valeurs propres λ et $\bar{\lambda} \in \mathbb{C}$, soit v_1 et v_2 deux vecteurs propres associés, alors $y(t) = e^{\alpha t}(C_1 \cos(\beta t) - C_2 \sin(\beta t))\, 2\mathrm{Re}(v_1) + e^{\alpha t}(C_2 \cos(\beta t) + C_1 \sin(\beta t))\,(-2\,\mathrm{Im}(v_1))$ où $\lambda = \alpha + i\beta$.

Corollaire 40 : Dans ce cas en coordonnées polaires, la trajectoire est décrite par $\xi = c e^{\alpha t}$ et on peut obtenir des spirales logarithmiques, 0 foyer stable, instable ou des solutions périodiques.

Références

Berthelin Equations différentielles Ber

Queffélec Zuily Eléments d'analyse QZ

J'intègre MP-MP* J'int