220 : Equations différentielles ordinaires. Exemples de résolution et d'études de solutions en dimension 1 et 2.

I Théorie des équations différentielles ordinaires

A Mise en place du problème. Ber I.1 I.2 I.3

Soit $\Omega \subseteq \mathbb{R}\times\mathbb{K}^N$ ouvert, $f : \Omega \to \mathbb{K}^N$, $(t_0, y_0)\in\Omega$, $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalle.

Définition 1 : On dit que $Y' = f(t, Y)$ est une équation différentielle en Y, relativement à la variable t.
Une solution de cette équation différentielle est une fonction dérivable Y définie sur I non réduit à un point telle que $Y'(t) = f(t, Y(t))$ pour tout $t\in I$.

Exemple 2 : $y' = 2t$, $ty' - 2y = 0$, $(y')^2 - 4y = 0$ sont des équations différentielles et la fonction $y(t) = t^2$ est une solution de ces équations (sur $I = \mathbb{R}$?)

Définition 3 : Une équation différentielle est dite d'ordre m si elle est de la forme
$y^{(m)} = f(t, y, \dots, y^{(m-1)})$ où $\Omega \subset \mathbb{R}\times(\mathbb{K}^N)^m$.

Remarque 4 : Si $N = 1$ alors on parle d'équation scalaire. Sinon on parle d'équation vectorielle.

Proposition 5 : Une fonction $y : I \to \mathbb{K}^N$ est une solution de $\begin{cases} y' = f(t,y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$ si et seulement si :
i) y est continue.
ii) pour tout $t\in I$, $(t, y(t))\in\Omega$.
iii) pour tout $t\in I$, $y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))\,ds$.

Définition 6 : On dit que y est solution maximale si elle n'admet pas de prolongements stricts (ie pas d'autres prolongements qu'elle-même).
Dans le cas où $\Omega = I\times\Omega'$, $\Omega'\subseteq\mathbb{K}^N$ ouvert, une solution globale est une solution définie sur I tout entier.

Proposition 7 : Une solution globale est maximale. La réciproque est fausse en général.

Contre exemple 8 : Soit $f(t,y) = y^2$ sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, $y_0 = y(0) > 0$. La fonction $y(t) = \frac{y_0}{1 - y_0 t}$ est solution sur $]-\infty, \frac{1}{y_0}[$ maximale et non globale.

Exemple 9 : La fonction $y : \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par $y(t) = e^t$ est une solution globale donc maximale pour l'équation différentielle $y' = y$.

B Existence et unicité des solutions maximales Ber III.1 III.2

Définition 10 : f est dite localement lipschitzienne par rapport à y si pour tout $(\tilde{t}, \tilde{y})\in\Omega$, il existe $C_0 = [\tilde{t} - T, \tilde{t} + T]\times\bar{B}(\tilde{y}, r) \subset \Omega$ avec $T, r > 0$ et $k > 0$ tels que pour tout $(t, y_1), (t, y_2)\in C_0$, $\|f(t, y_1) - f(t, y_2)\| \leq k\|y_1 - y_2\|$.

Exemple 11 : Les fonctions C^1 sont localement lipschitziennes par rapport à leur deuxième variable.

$\boxed{\text{Développement}}$ (Théorème de Cauchy-Lipschitz local) Si f est continue et localement lipschitzienne en y alors il existe une unique solution maximale et une seule $y : I \to \mathbb{K}^N$ de $\begin{cases} y' = f(t,y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$. De plus I est ouvert.

Définition 12 : On dit que f est globalement lipschitzienne par rapport à y, uniformément par rapport à t si pour tout intervalle compact $J\subset I$, il existe $k > 0$ tel que $\forall (t, y_1), (t, y_2) \in J\times X$ (où $X\subseteq\mathbb{K}^N$), $\|f(t, y_1) - f(t, y_2)\| \leq k\|y_1 - y_2\|$.

Lemme 13 : Soit $\alpha, \beta\in[0, +\infty[$ $(\alpha,\beta)\neq(0,0)$, $r_0\in]0, +\infty]$. On pose $I = [t_0 - \alpha, t_0 + \beta]$.
Soit $f : I\times\bar{B}(y_0, r_0)\to\mathbb{K}^N$ continue (dans toutes les variables) et globalement lipschitzienne en y, uniformément par rapport à t. On définit pour $y\in\check{E} = C(I, \bar{B}(y_0, r_0))$ la fonction $\phi(y)$ sur I par $\phi(y)(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))\,ds$.
On suppose que $\phi(y)\in\check{E}$ pour tout $y\in\check{E}$. Alors il existe une unique solution globale $y : I\to\mathbb{K}^N$ de $y' = f(t,y)$ telle que $y(t_0) = y_0$.

Théorème 14 (Cauchy-Lipschitz global) Si f est continue, globalement lipschitzienne par rapport à y, uniformément par rapport à t alors il existe une unique solution globale $y : I \to \mathbb{K}^N$ de $y' = f(t,y)$ telle que $y(t_0) = y_0$.

Corollaire 15 (Cauchy-Lipschitz linéaire) Soit $A\in C(I, \mathcal{M}_N(\mathbb{K}))$ et $B\in C(I, \mathbb{K}^N)$.
Alors $\exists!\, y : I\to\mathbb{K}^N$ solution globale de $\begin{cases} y' = A(t)\,y + B(t) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$.

C Passage du maximal au global. Ber 1.4 3.8

rajouter Gronwall diff et int avant

Lemme 16 (Gronwall) Soit $t_0\in I$, $u\in C(I, \mathbb{R})$ et $v\in C(I, \mathbb{R})$, $a\in\mathbb{R}$ tels que $u, v \geq 0$ et pour tout $t\in I$, $u(t) \leq a + |\int_{t_0}^{t} v(s)u(s)\,ds|$.
Alors pour tout $t\in I$, $u(t) \leq a\, e^{|\int_{t_0}^{t} v(s)\,ds|}$

Lemme 17: Si f est continue alors il existe un cylindre $C=[t_0-\alpha,t_0+\alpha]\times\bar{B}(y_0,r)\subset\Omega$ avec $\alpha, r>0$, tel que pour tout $(\tilde{t}_0,\tilde{y}_0)\in C$, il existe une solution de $y'=f(t,y)$, $y(\tilde{t}_0)=\tilde{y}_0$.

Théorème 18 (de sortie de tout compact). Si f est continue et localement lipschitzienne par rapport à y, soit $y:]c,d[\to \mathbb{K}^n$ solution maximale de $y'=f(t,y)$. Alors $(t,y(t))$ sort de tout compact de Ω quand $t\to d$.

Exemple 19: $y(t)=\frac{1}{1-t}$ solution de $y'=y^2$ et $(t,y(t))$ sort de tout compact de $\mathbb{R}^2$ quand $t\to 1$ du fait que $y(t)\to\infty$ quand $t\to 1$.

Corollaire 20 (Théorème des bouts) Si $I=]a,b[$ et $d<b$ alors $\|y(t)\|\xrightarrow[t\to d]{}+\infty$, autrement dit, si y est bornée alors $d=b$.

Corollaire 21: Si de plus f est bornée alors toute solution maximale de (E) est globale.

II Résolution d'équations différentielles

A Dans le cadre linéaire   Ber 2.3 2.4 2.5 2.6

Soit $f: \begin{array}{l} I\times\mathbb{K}^n \to \mathbb{R} \\ (t,y)\mapsto A(t)y+B(t)\end{array}$ avec $A\in C(I,M_n(\mathbb{K}))$ et $B\in C(I,\mathbb{K}^n)$ et $(t_0,y_0)\in I\times\mathbb{K}^n$.

Proposition 22: L'ensemble S_H des solutions maximales de $y'=A(t)y$ est un sev de $C(I,\mathbb{K}^n)$.

Corollaire 23: L'ensemble S des solutions de $y'=A(t)y+B(t)$ est un $\mathbb{K}$ espace affine de direction S_H.

Proposition 24: Soient $a,b: I\to\mathbb{K}$ les fonctions continues. La solution maximale (et définie sur I donc globale) de l'équation différentielle $y'=a(t)y+b(t)$, $y(t_0)=y_0$ est :
$$y(t)=y_0 e^{\int_{t_0}^t a(s)ds}+\int_{t_0}^t b(s)e^{\int_{s}^t a(\sigma)d\sigma}ds$$

Exemple 25: La solution maximale de $y'+y=e^t$, $y(-1)=0$ est $y(t)=\frac{e^t-e^{-t-2}}{2}$

Proposition 26 Les solutions de $y'=A(t)y$, $y(t_0)=y_0$ sont $y(t)=e^{(t-t_0)A}y_0$. A cste

Exemple 27: La solution de $\begin{cases}x'=x+2y\\y'=2x+y\end{cases}$ avec $\begin{cases}x(-1)=2\\y(-1)=1\end{cases}$ est $\begin{cases}x(t)=\frac12(3e^{3(t-1)}+e^{-(t-1)})\\y(t)=\frac12(3e^{3(t-1)}-e^{-(t-1)})\end{cases}$

Proposition 28: Si $A\in M_n(\mathbb{K})$ est constante alors on cherche les solutions de la forme $y(t)=e^{tA}C(t)$ avec $C\in C(I,\mathbb{K}^n)$.
On trouve $y(t)=e^{(t-t_0)A}y_0+\int_{t_0}^t e^{(t-s)A}B(s)ds$

Corollaire 29: Pour résoudre $y''+a_1(t)y'+a_0(t)y=b(t)$, $(a_0,a_1,b)\in C(I,\mathbb{K})$ les solutions sont de la forme : $\begin{cases}\lambda' y_1+\mu' y_2=0\\ \lambda' y_1'+\mu' y_2'=0\end{cases}$ $y=\lambda y_1+\mu y_2$.

Exemple 30: La solution de $y''-2y'+y=e^t$, $y(-1)=0$ et $y'(-1)=1$ est $y(t)=\left(\frac{t^2}{2}+t(e+1)+e+\frac12\right)e^t$.

B Utilisation des séries entières   QZ 10.6.3   J'imt 11.4

Remarque 31: Il est souvent judicieux de chercher les solutions particulières d'équation différentielles sous forme de série entière, notamment lorsque les fonctions coefficients sont des polynômes.

Théorème 32: On suppose que $p(x)=\sum_0^\infty p_n x^n$ et $q(x)=\sum_0^\infty q_n x^n$, convergent pour $|x|<R$. Alors pour tout $(a_0,a_1)\in\mathbb{K}^2$, $y''+py'+qy=0$ a une unique solution y telle que $y(0)=a_0$ et $y'(0)=a_1$, y étant développable en série entière convergente sur $]-R,R[$.

Développement | $\varphi: t\mapsto\cos(\alpha \operatorname{Arcsin} t)$, $\alpha\in\mathbb{R}$ est développable en série entière.

Application 33: Arcsin^2 est dse sur $]-1,1[$ et $\forall t\in]-1,1[$, $\operatorname{Arcsin}^2 t=\sum_{m=1}^{+\infty}\frac{2^{2m-1}((m-1)!)^2}{(2m)!}t^{2m}$

C EDO à variables séparées, homogènes   Ber 4.2

Définition 34: On dit que $y'=f(t,y)$ est à variables séparables si pour tout $t,y\in\mathbb{R}$ $f(t,y)=g(y)h(t)$ avec g et h C^0.

Proposition 35: Soit $\Omega=\{y : g(y)\neq0\}$ et $]y_1,y_2[\subset\Omega$, soit G une primitive de $\frac1g$ et soit H une primitive de h. Alors les solutions de $y'=f(t,y)$ sont de la forme $y(t)=G^{-1}(H(t)+C)$ avec C constante.

Exemple 36: Les solutions de $t\ln(t)y'-y-1=0$ pour $t>0$ sont de la forme $t\mapsto -1+C\ln t$ sur $]0,+\infty[$, $C\in\mathbb{R}$.

Définition 37: On dit que $y'=f(t,y)$ est homogène si $f(t,y)=g(\frac yt)$ où g est C^0.

Proposition 38: Pour $t\neq0$ le changement de variable $z=\frac yt$ permet de se ramener à $z'=\frac{g(z)}{t}-\frac zt$.

Exemple 39 : Les solutions de $t^2 y' - 2ty + t^2 = 0$ sont :

$$y_{C,K}(t) = \begin{cases} t + Ct^2 & \text{pour } t > 0 \\ t + Kt^2 & \text{pour } t < 0. \end{cases}$$

III Etude qualitative

A Equations autonomes Ber 5.1

Définition 40 : Une équation différentielle autonome est une équation différentielle de la forme $y' = f(y)$

Remarque 41 : Pour $N = 1$, une équation autonome est une équation à variables séparables.

Définition 42 : La trajectoire d'une solution maximale $y : I \to \mathbb{R}^N$ de $y' = f(y)$ est l'ensemble $\{y(t),\ t \in I\}$

Définition 43 : Une application $f : \Omega \to \mathbb{R}^N$, où Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^N$, est appelé un champ de vecteurs. Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}^2$ un champ de vecteurs sur Ω. On pose $f(x,y) = (f_1(x,y), f_2(x,y))$. L'isocline verticale est l'ensemble des points $(x,y) \in \Omega$ où le vecteur $f(x,y)$ est vertical soit $\{(x,y) \in \Omega,\ f_1(x,y) = 0\}$.

Exemple 44 : On peut faire une étude qualitative de $\begin{cases} x' = y + x - 1 \\ y' = 2x - y \end{cases}$ [ANNEXE]

B Stabilité des solutions Ber 6.2

Soit f continue et localement lipschitzienne par rapport à y et (x_0, y_0, J) solution maximale de $y' = f(t,y)$, $y(t_0) = y_0$.

Définition 45 : La solution y_{t_0,y_0} est stable (à droite) si :

i) $\exists \alpha > 0, \forall y_1 \in \Omega', \|y_1 - y_0\| \leq \alpha \Rightarrow \forall t \geq t_0$ $y_{t_0,y_1}(t)$ est bien définie

ii) $\forall \varepsilon > 0$, $\exists m \in]0, \alpha]$ tel que, $\forall y_1 \in \Omega'$, $\|y_1 - y_0\| \leq m \Rightarrow \|y_{t_0,y_1}(t) - y_{t_0,y_0}(t)\| \leq \varepsilon$ $\forall t \geq t_0$

Définition 46 : La solution $y_{t_0,y_0}(t)$ est attractive (à droite) s'il existe $\delta > 0$ tel que $y_{t_0,y_1}(t) - y_{t_0,y_0}(t) \underset{+\infty}{\to} 0$ $\forall y_1 \in \Omega'$ tel que $\|y_1 - y_0\| \leq \delta$.

Définition 47 : La solution y_{t_0,y_0} est dite asymptotiquement stable (à droite) si elle est stable (à droite) et attractive (à droite).

Remarque 48 : La notion de stabilité peut se comprendre en disant qu'une solution est stable si de petites perturbation des CI conduisent à de faibles variations des valeurs de la solution pour les temps ultérieurs. La notion de stabilité asymptotique, demande en plus de rester proche, que la solution perturbée revienne quand on tend vers l'infini vers la solution donnée.

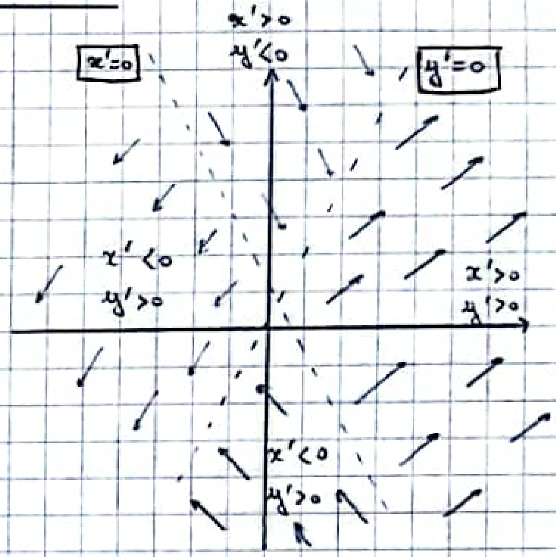
Exemple 49 : Les solutions de $y' = y$: $y_{t_0,y_0}(t) = y_0 e^{t - t_0}$ sont asymptotiquement stables à gauche mais pas à droite (même pas stable tout court)

Scanné avec CamScanner

Références :

- Florent Berthelin   Equations différentielles   Ber
- Queffélec Zuily   Eléments d'analyse   QZ
- J'intègre MP-MP*   J'int

Annexe :



Etude qualitative de l'exemple 44 : $\begin{cases} x' = y + x - 1 \\ y' = 2x - y \end{cases}$