215 : Applications différentiables définies sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Exemples et applications.

I Applications différentiables et dérivées partielles

A Différentielle El Am 3.1

On considère U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f : U \to \mathbb{R}^p$.

Définition 1 : Soit $a \in U$. On dit que f est différentiable en a s'il existe une application linéaire continue $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ telle que $\forall h \in \mathbb{R}^n$,
$$f(a+h) = f(a) + L(h) + o(\|h\|) \quad \text{lorsque } \|h\| \to +\infty.$$

Proposition 2 : Dans ce cas, L est unique, notée $df(a)$ et appelée différentielle de f en a. De plus $df : U \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ est appelée différentielle de f.

Remarque 3 : La différentiabilité généralise la dérivabilité. En effet soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable en a. Alors f est différentiable en a et $f'(a) = df(a)(1)$. Plus généralement $df(a)(h) = h f'(a)$.

Exemple 4. $df(x)(h) = 2\langle x, h\rangle$ où $f : E \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \|x\|^2 = \langle x, x\rangle$ (espace euclidien)
Dvlpt : différentielle du déterminant.

Proposition 5 : Si f est linéaire alors f est différentiable et $df(x) = f$.

Corollaire 6 : Si $f : \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^l \to \mathbb{R}^p$ est bilinéaire continue alors f est différentiable et pour tout $(h, h') \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^l$, $d(x,y)(h,h') = f(x,h) + f(h', y)$.

Exemple 7 : Si $f : M_n(\mathbb{R}) \times M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$, $(A, B) \mapsto AB$ alors f est différentiable et $df(A,B)(H,K) = AK + HB$.

Proposition 8 : Soit $f : U \to \mathbb{R}^{p_1} \times \dots \times \mathbb{R}^{p_n}$ et $a \in U$, alors f est différentiable en a ssi les f_i composantes le sont. Dans ce cas la différentielle de f en a est donnée par $h \mapsto df(a)(h) = (df_1(a)(h), \dots, df_p(a)(h))$.

B Opérations algébriques sur les différentielles El Am 3.2

Proposition 9 : Soient $f, g : U \to \mathbb{R}^p$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $a \in U$. Si f et g sont différentiables en a alors $\alpha f + \beta g$ aussi et $d(\alpha f + \beta g)(a) = \alpha df(a) + \beta dg(a)$.

Proposition 10 : Soit $a \in U$, si f est différentiable en a, alors f est continue en a.

Remarque 11 : La réciproque est fausse. La fonction $x \mapsto \sqrt{|x|}$ est continue sur $\mathbb{R}$ mais n'est pas différentiable en 0.

Théorème 12 : Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, V ouvert de $\mathbb{R}^p$, $f : U \to V$ et $g : V \to \mathbb{R}^m$. Si f est différentiable en $a \in U$ et g en $f(a)$ alors $g \circ f$ est différentiable en a et
$$d(g \circ f)(a) = d(g(f(a))) \circ df(a).$$

Exemple 13 : Si $f = \|\cdot\|^2$ sur $\mathbb{R}^n$ et $g = \sqrt{\cdot}$ sur $\mathbb{R}_+$ alors $g \circ f$ est différentiable sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ et $d\|\cdot\|(a)(h) = \dfrac{\langle a, h\rangle}{\|a\|}$

C Dérivées directionnelles et dérivées partielles El Am 3.3

Définition 14 : On dit que f admet une dérivée en a suivant $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ si $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^p$, $t \mapsto f(a + tv)$ est dérivable en 0. Dans ce cas sa dérivée est notée $\dfrac{\partial f(a)}{\partial v}$

Exemple 15 : Si $f(x,y) = x^2 - y^3$, $v = (1,0)$ alors f admet une dérivée en $(1,2)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial v}(1,2) = 2$.

Proposition 16 : Si f différentiable en a pour tout $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ alors f admet une dérivée en a suivant v et on a $\dfrac{\partial f}{\partial v}(a) = df(a)(v)$.

Remarque 17 : La réciproque est fausse. Soit $f(x,y) = \begin{cases} y^2/x & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ alors f admet une dérivée directionnelle en $(0,0)$ suivant tout $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ mais f n'est pas continue en $(0,0)$ (car $f(\frac{1}{n}, \frac{1}{\sqrt{n}}) = 1 \underset{n \to +\infty}{\not\to} 0$).

Définition 18 : Soit $B = (e_1, \dots, e_n)$ une base de $\mathbb{R}^n$. On dit que f admet une dérivée partielle (première) en $a \in U$ par rapport à la $i$ème place si f admet une dérivée en a suivant e_i. On note $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \dfrac{\partial f}{\partial e_i}(a)$

Exemple 19 : Si $f(x,y) = x^2 y - 2\sin(xy)$ alors $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 2xy - 2y\cos(xy)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y} = x^2 - 2x\cos(xy)$.

Proposition 20 : Soit $a \in U$, on note $f_1, \dots, f_p$ les composantes de f. Alors f admet une $i$ème dérivée partielle ssi les f_k admettent une $i$ème dérivée partielle.

Dans ce cas $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_i}(a), \dots, \frac{\partial f_p}{\partial x_i}(a)\right)$

Exemple 21 : Si $f(x,y) = (2xy - e^{xy}, x^3 - 2xe^y)$ alors on a :

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = (2y - ye^{xy}, 3x^2 + 2e^y) \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = (2x - xe^{xy}, 2xe^y)$$

Théorème 22 : Si f est différentiable en $a \in U$ alors f admet des dérivées partielles et

$$df(a)(h) = \sum_{k=1}^{m} h_k \frac{\partial f}{\partial x_k}(a)$$

Remarque 23 : La réciproque est fausse. Considérer $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

D Jacobien et gradient   El Am 3.3 3.4

Définition 24 : Si f est différentiable en $a \in U$ on appelle matrice jacobienne de f

$$\operatorname{Jac} f(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_p}(a) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f_p}{\partial x_p}(a) \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m,p}(\mathbb{R})$$

Si $m = p$ $\det(\operatorname{Jac} f(a))$ est appelé jacobien de f en a.

Exemple 25 : Si $f(x,y,z) = (xyz, x^2 + y^2 + 2z^2)$ alors

$$\operatorname{Jac} f(x,y,z) = \begin{pmatrix} yz & xz & xy \\ 2x & 2y & 4z \end{pmatrix}$$

Théorème 26 (Riesz) Pour tout $\varphi \in (\mathbb{R}^n)^*$, $\exists! \, x \in \mathbb{R}^n$, $\forall y \in \mathbb{R}^n$, $\varphi(y) = \langle x, y \rangle$.

Prop/déf 27 : Soit $f : U \to \mathbb{R}$ différentiable sur U. Alors pour tout $a \in U$, il existe un unique vecteur $\nabla f(a)$ appelé gradient de f en a tel que pour tout $h \in \mathbb{R}^m$, $df(a)(h) = \langle \nabla f(a), h \rangle$.

Proposition 28 : Dans ce cas $\nabla f(a) = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_k}(a) e_k$

Exemple 29 : Si $f(x,y,z) = x^3 - 2xy - z^3$ alors $\nabla f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 3x^2 - 2y \\ -2x \\ -3z^2 \end{pmatrix}$

II Différentiabilité d'ordre supérieur

A Applications de classe C^1 El Am 3.5 3.7

Définition 30 : On dit que f est de classe C^1 si f est différentiable sur U et que sa différentielle est continue sur U.

Proposition 31 : f est de classe C^1 sur U ssi les dérivées partielles de f relativement à une base de E existent et sont continues sur U.

Proposition 32 : Avec les notations adéquates, $\alpha f + \beta g$ et $f \circ g$ sont C^1 sur U

Définition 33 : On dit que $f : U \to V \subset \mathbb{R}^p$ ouvert est un C^1 difféomorphisme si :
i) f est une bijection de U sur V
ii) f est de classe C^1 sur U
iii) f^{-1} est de classe C^1 sur V.

Exemple 34 : Si $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est linéaire bijective alors c'est un C^1 difféomorphisme.
La fonction $x \mapsto x^3$ n'est pas un C^1 difféomorphisme de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ car sa réciproque n'est pas différentiable en 0.

Proposition 35 : Si $f : U \to V$ est un C^1 difféomorphisme alors $d(f^{-1})(y) = (df(y))^{-1}$

B Différentielle seconde   El Am 4.1

Définition 36 : On dit que f est deux fois différentiable en $a \in U$ si f est différentiable sur un voisinage de a et si df est elle même différentiable en a.

Remarque 37 : Dans ce cas $d(df)(a)$ est une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$.

Proposition 38 : Il existe un isomorphisme canonique isométrique entre
$\mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^m))$ et $\mathcal{L}_2(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p, \mathbb{R}^m)$

Définition 39 : Si f deux fois différentiable sur U alors on appelle différentielle seconde de f l'application $d^2 f$: $\begin{cases} U \to \mathcal{L}_2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m, \mathbb{R}^p) \\ x \mapsto d^2 f(x) \end{cases}$ avec $d^2 f(x)(h,k) = (d(df)(x)(h))(k)$.
Si de plus $x \mapsto d^2 f(x)$ est continue sur U, on dit que f est de classe C^2.

Théorème 40 (Schwarz) : Si f deux fois différentiable alors $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a)$

Exemple 41 : Si $f(x,y) = \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$, $f(0,0) = 0$ alors
$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$ (Hauchecorne)

Définition 42 : Si f admet des dérivées partielles d'ordre 2 en a, on appelle matrice Hessienne de f en a la matrice : $\mathrm{Hess}(f)(a) = \left(\frac{\partial^2 f(a)}{\partial x_i \partial x_j}\right)_{1 \leq i,j \leq n}$

Remarque 43 : Dans ce cas $d^2 f(a)(h,k) = {}^t h \, \mathrm{Hess}(f)(a) \, k$.

C Accroissements finis et formules de Taylor El Am 3.6 4.3

Théorème 44 : Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ ouvert convexe et $f : U \to \mathbb{R}$ différentiable sur U. Soient $(a,b) \in U^2$ $a \neq b$.
Alors $\exists c \in]a,b[$, $f(b) - f(a) = df(c)(b-a)$.

Théorème 45 : Soit $a, h \in \mathbb{R}^n$ tels que $[a, a+h] \subseteq U$. Alors :

i) Si f de classe C^{p+1} : $f(a+h) = f(a) + \sum_{k=1}^{p} \frac{h^k}{k!} d^k f(h)(a) + \frac{h^{p+1}}{p!} \int_0^1 (1-t)^p d f^{(p+1)}(a+th) \, dt$

ii) Si f est $p+1$ fois différentiable sur U alors $\exists \theta \in]0,1[$:
$$f(a+h) = f(a) + \sum_{k=1}^{p} \frac{d^k f(a)(h,\dots,h)}{k!} + \frac{d^{p+1} f(a+\theta h)(h,\dots,h)}{(p+1)!}$$

iii) Si f est de classe C^{p-1} sur U et p fois différentiable en a alors $\exists$ $V \in \mathcal{V}_0$ tq :
$\exists \varepsilon : V \to \mathbb{R}^p$, $\varepsilon \xrightarrow[h \to 0]{} 0$, $\forall h \in V$, $f(a+h) = f(a) + \sum_{k=1}^{p} \frac{d^k f(a)(h,\dots,h)}{k!} + \varepsilon(h) \|h\|^p$

III Etude d'extrema

A Conditions du premier ordre El Am 5.1

Définition 46 : On suppose que f est différentiable en $a \in U$. On dit que a est un point critique de f si $df(a) = 0$.

Proposition 47 : On suppose que f est différentiable en $a \in U$. Si f admet un extremum local en a alors $df(a) = 0$.

Contre exemple 48 : La réciproque est fausse. Par exemple $f(x) = x^3$ admet $a=0$ comme point critique mais $a=0$ n'est pas un extremum car f est strictement croissante.

Remarque 49 : $\{$extrema locaux$\} \subseteq \{$points critiques$\}$

B Conditions du second ordre El Am 5.1 Rom 5.15

Proposition 50 : Si f admet un minimum (resp maximum) local en un point $a \in U$ et si f est deux fois différentiable en a, alors $df(a) = 0$ et $\forall h \in \mathbb{R}^n$ $d^2 f(a)(h,h) \geq 0$
(resp ≤ 0)

Définition 51 : On dit que a est un point critique non dégénéré si $\det\left(\frac{\partial^2 f(a)}{\partial x_i \partial x_j}\right) \neq 0$.

Théorème 52 : Si $a \in U$ est un point critique de f :

i) Si $q = d^2 f(a)$ est une forme coercive + (ie $\exists \varepsilon_0 > 0$, $q(h) \geq \varepsilon_0 \|h\|^2$), alors f présente un minimum local strict en a.

ii) Si $q = d^2 f(a)$ est une forme coercive négative (ie $\exists \varepsilon_0 > 0$, $q(h) \leq -\varepsilon_0 \|h\|^2$), alors f présente un maximum local strict en a.

Remarque 53 : Si q est dégénérée on ne peut rien conclure. Par exemple $f(x,y) = x^2 + \lambda y^4$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors $(0,0)$ est un minimum local si $\lambda \geq 0$ et un maximum local si $\lambda \geq 0$.

Développement Soit $A \in S_p^{++}(\mathbb{R})$, $b \in \mathbb{R}^p$, $f(x) = \frac{1}{2}\langle Ax, x\rangle - \langle b, x\rangle$ et (x_m) définie par $x_{m+1} = x_m - \rho_m \nabla f(x_m)$ avec $\forall m \in \mathbb{N}$ $\rho_m = \underset{\rho \in \mathbb{R}_+^*}{\mathrm{argmin}}(f(x_m - \rho \nabla f(x_m)))$.
Alors $x_m \to x_*$ avec $x_* \in \mathbb{R}^p$ unique minimum global de f.

Application 54 : On peut donc approcher numériquement la solution $x \in \mathbb{R}^p$ de $Ax = b$.

Références :

- El Amrani Calcul différentiel El Am
- Rombaldi Analyse matricielle Rom