214 : Théorème d'inversion locale, théorème des fonctions implicites. Exemples et applications en analyse et géométrie.

Soit E, F deux evn de dimension finie.

I Théorème des fonctions implicites

A Par le théorème du point fixe de Picard ER A 6.1 Ber 3.2

Théorème 1 : (du point fixe de Picard) Soit Y une partie fermée de F et $\phi : Y \to Y$ une application k contractante. Alors ϕ admet un unique point fixe.

Exemple 2 : $\phi(x) = \sqrt{x}$ sur $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ est contractante et $\mathrm{Fix}\, \phi = \{0\}$

Théorème 3 (du point fixe à paramètres) Soit $A \subseteq E$ et $Y \subseteq F$ fermé. Soit $\phi : A \times Y \to Y$ tq $\forall y \in Y$, $\lambda \mapsto \phi(\lambda, y)$ est continue et $\exists k \in [0,1[$, $\forall \lambda \in A$, $y \mapsto \phi(\lambda, y)$ est k contractante. Alors $\forall \lambda \in A$, $\exists! y_\lambda \in Y$, $\phi(\lambda, y_\lambda) = y_\lambda$ et $\lambda \mapsto y_\lambda$ continue sur A.

Application 4 (Théorème de Cauchy-Lipschitz globalement lipschitzien). Soit $I \subseteq \mathbb{R}$ intervalle et $f : I \times \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ continue et globalement lipschitzienne en y. Soit $(t_0, y_0) \in I \times \mathbb{K}^n$ alors $\exists! y : I \to \mathbb{K}^n$ solution de $y' = f(t,y)$, $y(t_0) = y_0$.

B Approche d'une courbe par le graphe d'une fonction ER A 6.2

Remarque 5 : Soit $f(x,y) = x^2 + y^2 - 1$. Au voisinage de $(a,b) \notin \{(-1,0), (1,0)\}$ $f(x, \varphi(x)) = 0$ ssi $\varphi(x) = \pm\sqrt{1-x^2}$

Théorème 6 (des fonctions implicites) Soit $\Omega \subseteq E \times F$ ouvert, $f : \Omega \to F$ C^1. S'il existe $(x_0, y_0) \in \Omega$ tq $f(x_0,y_0) = 0$, $d_y f(x_0,y_0)$ est un endomorphisme inversible alors il existe un voisinage ouvert U de x_0, un voisinage ouvert V de y_0 et $\varphi : U \to V$ C^1 tq :

$((x,y) \in U \times V$ et $f(x,y) = 0) \iff (x \in U$ et $y = \varphi(x))$ de plus :

$\forall x \in U$, $d\varphi(x) = -(d_y f(x, \varphi(x)))^{-1} \circ d_x f(x, \varphi(x))$.

Exemple 7 : Pour $f(x,y) = x^2 + y^2 - 1$, $\partial_y f(x,y) = 2y$ d'où l'existence d'une fonction implicite ssi $y \neq 0$.

Théorème 8 : Soit f C^1 sur $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{m+1}$ ouvert (à valeurs dans $\mathbb{R}$) et soit $(a_1, \dots, a_m, b) \in \Omega$ tq $f(a_1, \dots, a_m, b) = 0$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(a_1, \dots, a_m, b) \neq 0$

Alors il existe $U \subseteq \mathbb{R}^m$ ouvert, $V \subseteq \mathbb{R}$ ouvert, $\varphi : U \to V$ C^1 tels que :

i) $(a_1, \dots, a_m, b) \in U \times V \subset \Omega$

ii) $\forall (x_1, \dots, x_m) \in U$, $y \in V$, $f(x_1, \dots, x_m, y) = 0 \Rightarrow y = \varphi(x_1, \dots, x_m)$.

iii) $\forall (x_1, \dots, x_m) \in U$, $f(x_1, \dots, x_m, \varphi(x_1, \dots, x_n)) = 0$.

iv) Si $(x_1, \dots, x_m) \in U \times V$ alors $f'_y(x_1, \dots, x_m, y) \neq 0$. De plus $\forall x = (x_1, \dots, x_n) \in U$ et $i \in [\![1, m]\!]$ on a $\partial_{x_i} \varphi(x_1, \dots, x_n) = -\partial_{x_i} f(x, \varphi(x)) / \partial_y f(x, \varphi(x))$.

Exemple 9 : Si $E = F = \mathbb{R}$ alors l'équation $f(x,y) = 0$ est l'équation implicite d'une courbe de $\mathbb{R}^2$. Cela peut s'écrire $y = \varphi(x)$ au voisinage d'un point (a,b) tq $f'_y(a,b) \neq 0$. On a alors $\partial_x \varphi(x) = -\partial_x f(x, \varphi(x)) / \partial_y f(x, \varphi(x))$.

Remarque 10 : i) La condition $\partial_y f(x_0, y_0)$ inversible est suffisante mais pas nécessaire pour la résolubilité locale de $f(x,y) = 0$. $f(x,y) = x - y^3$ a pour solution $x \mapsto \sqrt[3]{x}$ qui n'est pas C^1 au voisinage de 0 car non dérivable en 0.

ii) La condition $f'_y(x_0, y_0) \neq 0$ revient à dire que la tangente à la courbe de niveau $f(x,y) = f(x_0, y_0)$ en (x_0, y_0) n'est pas verticale.

II Théorèmes importants qui en découlent

A Théorèmes d'extrema sous contraintes ER A 6.3

Théorème 11 (multiplicateurs de Lagrange V1) Soit $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ouvert, f et $g : U \to \mathbb{R}$ C^1, $\Gamma = g^{-1}(\{0\})$ tq $f_{|\Gamma}$ admette un extremum local en $a \in \Gamma$, $dg(a) \neq 0$. Alors $\exists! \lambda \in \mathbb{R}$ tel que $d(f + \lambda g)(a) = 0$.

Remarque 12 : Le nombre λ est appelé multiplicateur de Lagrange associé à la contrainte $g = 0$.

Exemple 13 : Le minimum et maximum de $f(x,y) = x + y$ restreinte à $\Gamma = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x^4 + y^4 = 1\}$ sont atteints en $(-2^{-1/4}, -2^{-1/4})$ et $(2^{-1/4}, 2^{-1/4})$.

$\boxed{\text{Développement}}$ (multiplicateurs de Lagrange V2) Soit $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ouvert, $f \in C^1(U, \mathbb{R})$, $g \in C^1(U, \mathbb{R}^p)$. Posons $\Gamma = g^{-1}(\{0\})$ et supposons que $f_{|\Gamma}$ admette un extremum local en $a \in \Gamma$ tq $dg(a)$ surjective. Alors $\exists! (\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p$, $d(f + \sum_{i=1}^{p} \lambda_i g_i)(a) = 0$.

Remarque 14 : $dg(a)$ surjective revient à supposer $dg_1(a), \dots, dg_p(a)$ linéairement indépendantes.

Exemple 15 : Si $f(x,y,z) = x + z$, $g(x,y,z) = (x^2 + y^2 + z^2 - 1, z - y)$ f admet un unique

B Théorèmes d'inversion   ElA 6.4   Zad

Définition 16 : Soit $k\in\mathbb{N}^*$, $U\subseteq E$ ouvert et $V\subseteq F$ ouvert. On dit que f est un C^k difféomorphisme de U sur V si :
i) f est bijective de U sur V,
ii) f est de classe C^k sur U,
iii) f^{-1} est de classe C^k sur V.

Remarque 17 : Si $f:U\to V$ est un C^1 difféomorphisme alors $d_xf: E\to F$ est un isomorphisme et $(d_xf)^{-1} = d_{f(x)}f^{-1}$.

Théorème 18 : (d'inversion locale) Soit $U\subseteq E$ ouvert non vide, $f: U\to F$ C^k. S'il existe $x_0\in U$ tq $df(x_0): E\to F$ isomorphisme alors il existe un voisinage ouvert U' de x_0 et un voisinage ouvert V' de $y_0=f(x_0)$ tels que $f: U'\to V'$ est un C^k difféomorphisme. De plus on a $\forall y\in V'$, $df^{-1}(y) = [df(f^{-1}(y))]^{-1}$.

Remarque 19. $df(x)$ <=> $\mathrm{Jac}\, f(x)\neq 0$.

Développement L'application exp : $\begin{array}{ccc} M_n(\mathbb{C}) & \to & GL_n(\mathbb{C}) \\ A & \mapsto & \sum_0^{+\infty} \frac{A^k}{k!} \end{array}$ est surjective.

Théorème 20 (d'inversion globale) Soit $U\subseteq E$ ouvert, $f: U\to F$. On suppose que : i) f est C^k ($k\geq 1$) sur U. ii) f injective sur U iii) $\forall x\in U$, $df(x): E\to F$ isomorphisme. Alors $f(U)\subseteq F$ est ouvert et $f: U\to f(U)$ est un C^k difféomorphisme.

Exemple 21 : Soit $f: \begin{array}{ccc}\mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (r,\theta) & \mapsto & (x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta)\end{array}$, alors f est un C^∞ difféomorphisme et $f^{-1}(x,y) = \left(r=\sqrt{x^2+y^2},\ \theta = \arctan\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) + 2k\pi\right)$

Corollaire 22 : Soient $I\subseteq\mathbb{R}$ intervalle ouvert et $f: I\to\mathbb{R}$ C^k ($k\geq 1$) telle que f' ne s'annule pas sur I. Alors $f(I)$ est un intervalle de $\mathbb{R}$ (ouvert) et f est un C^k difféomorphisme de I sur $f(I)$.

III Utilisation pour caractériser les sous variétés

A Notion de sous variété   ElA 6.5

Définition 23 : Soit $U\subseteq\mathbb{R}^n$ ouvert, $a\in U$ et $f: U\to\mathbb{R}^p$ ($p\in\mathbb{N}^*$) C^k. On dit que f est une submersion en a si $df(a)$ est une surjection de $\mathbb{R}^n$ sur $\mathbb{R}^p$ (en particulier on a $n\geq p$).

Exemple 24 : $f(x,y) = x^2+y^2-1$ est une submersion en tout $(x,y)\neq(0,0)$.

Définition 25 : Une partie $M\subseteq\mathbb{R}^n$ est une sous variété de dimension d de classe C^k dans $\mathbb{R}^n$ si $\forall x\in M$, $\exists U_x$ voisinage ouvert de x dans $\mathbb{R}^n$ et $f: U_x\to\mathbb{R}^{n-d}$ de classe C^k, $y_0\in\mathbb{R}^{n-d}$ fixé tq $U_x\cap M = f^{-1}(\{y_0\})$ et $df(x)\in\mathcal{L}_c(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^{n-d})$ est surjective. On dit alors que f est une équation locale régulière de la sous variété M au voisinage du point x.

Exemple 26 : i) Les sous variétés de dimension n de $\mathbb{R}^n$ sont les ouverts de $\mathbb{R}^n$.
ii) Par le théorème d'inversion locale, les sous variétés de dimensions 0 de $\mathbb{R}^n$ sont les sous ensemble dont tous les points sont isolés ($\forall x\in M$, $\exists r_x\in\mathbb{R}_+^*$ \ $M\cap B(x,r_x)=\{x\}$).

Définition 27 : Les sous variétés de dimension 1 dans $\mathbb{R}^n$ sont appelées les courbes de $\mathbb{R}^n$. Les sous variétés de dimension 2 sont appelées les surfaces de $\mathbb{R}^n$. Les sous variétés de dimension $n-1$ de $\mathbb{R}^n$ sont appelées les hypersurfaces de $\mathbb{R}^n$.

Exemple 28 : $S^n = \{(x_1,\dots,x_{n+1})\in\mathbb{R}^{n+1},\ \sum_1^{n+1} x_i^2 = 1\}$ est une hypersurface de $\mathbb{R}^{n+1}$ de classe C^∞.
Le graphe d'une application C^k est une sous variété.

Proposition 29 : Si M est une sous variété de dimension d et de classe C^k dans $\mathbb{R}^n$ et si $\phi: U\to\mathbb{R}^p$ est un C^l difféomorphisme sur son image alors soit $\phi(M\cap U)$ est vide soit c'est une sous variété de $\mathbb{R}^p$ de dimension d et de classe $C^{\min(k,l)}$.

B Caractérisation des sous variétés   ElA 6.5

Théorème 30 : M est une sous variété de classe C^k et de dimension d dans $\mathbb{R}^n$ si et seulement si $\forall x\in M$ $\exists U\subseteq\mathbb{R}^n$ voisinage ouvert de x, $\exists V\subseteq\mathbb{R}^p$ voisinage ouvert de 0 et $\exists\phi: U\to V$ C^k difféomorphisme tq :
$\phi(x)=0$ et $\phi(U\cap M) = V\cap(\mathbb{R}^d\times\{0_{n-d}\})$.
On dit alors que ϕ est un redressement local de M au voisinage de x.

Exemple 31 : $\phi(x,y) = (\arctan(\frac{x}{y}),\ x^2+y^2-1)$ est un redressement pour S^1.

Théorème 32 (caractérisation locale par graphe) M est une sous variété de classe C^k et de dimension d dans $\mathbb{R}^n$ ssi $\forall x\in M$ $\exists U_x$ ouvert voisinage de x, une identification linéaire $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^{n-d}$, un voisinage ouvert U_1 de x_1 dans $\mathbb{R}^d$, un voisinage ouvert U_2 de x_2 dans $\mathbb{R}^{n-d}$ (où $x=(x_1,x_2)$) et $\varphi_x: U_1\to U_2$ C^k tq $M\cap(U_1\times U_2)$ soit le graphe de φ_x ie $U_x\cap M = \{(y,\varphi_x(y)),\ y\in V\}$.

On dit que M est localement le graphe de φ_x au voisinage de x.

Définition 33. On dit que $f : E \to F$ est un homéomorphisme si f est bijective, continue et si sa réciproque $f^{-1} : F \to E$ est continue.

Théorème 34 (caractérisations par paramétrisations locales) M est une sous variété de classe C^k de dimension d dans $\mathbb{R}^n$ ssi $\forall x \in M$, $\exists U$ ouvert voisinage de x tq $\exists \Omega \subset \mathbb{R}^d$, $\exists g : \Omega \to \mathbb{R}^n$ de classe C^k tq g est un homéomorphisme de Ω sur $M \cap U$ et $d_{g^{-1}(x)} g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^n$ est injective

Références :

- El Amrani Calcul différentiel ElA
- Zavidovique Un max de maths Zad