265

EXEMPLES D'ÉTUDES ET D'APPLICATIONS DE FONCTIONS USUELLES ET SPÉCIALES.

I_ AUTOUR DE L'EXPONENTIELLE

a) Exponentielle réelle et complexe [Tauvel][Rudin]

Def 1 : On définit la fonction exponentielle sur $\mathbb{C}$ par
$$z \mapsto e^z = \exp(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} \in \mathbb{C}.$$
Elle est bien définie comme somme de série entière de rayon de convergence infini.

Prop 2 :
- exp induit un morphisme de groupes surjectif de $(\mathbb{C},+)$ dans $(\mathbb{C}^*,\times)$.
- exp est holomorphe sur $\mathbb{C}$, et est égale à sa dérivée.

Application 3 : $\exp|_{\mathbb{R}}$ est la solution du problème de Cauchy
$$\begin{cases} y' = y \\ y(0) = 1 \end{cases} \text{ sur } \mathbb{R}.$$

Prop 4 : Soient $z, \zeta \in \mathbb{C}$.
- $e^{z+\zeta} = e^z e^\zeta$
- $e^z \neq 0$
- $|e^z| = e^{\mathrm{Re}(z)}$
- $|e^z| = 1 \iff z \in i\mathbb{R}$

Prop 5 : L'application $t \in \mathbb{R} \mapsto \exp(it) \in \mathbb{U}$ est un morphisme de groupes surjectif, de noyau de la forme $\tau\mathbb{Z}$, avec $\tau \in \mathbb{R}^+$.
On définit $\pi := \frac{\tau}{2}$.

Corollaire 6 : La fonction exp est périodique, et l'ensemble des périodes est $2i\pi\mathbb{Z}$.

Prop 7 : $\exp|_{\mathbb{R}}$ est une fonction positive, strictement croissante, convexe, et $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$; $\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$.

b) Fonctions circulaires

Def 8 : On définit les fonctions cosinus et sinus sur $\mathbb{C}$ par :
$$\cos : z \mapsto \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2} \quad ; \quad \sin : z \longmapsto \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}.$$

Rem 9 : Si $t \in \mathbb{R}$, on retrouve les formules $\cos(t) = \mathrm{Re}(e^{it})$, $\sin(t) = \mathrm{Im}(e^{it})$.

Rem 10 : cos et sin sont holomorphes sur $\mathbb{C}$, 2π-périodiques, et respectivement paire et impaire, et de dérivées sin et $-\cos$.

Prop 11 : Pour $z \in \mathbb{C}$,
$$\cos z = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}$$
$$\sin z = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Prop 12 : Pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, il existe un unique $r \in \mathbb{R}_+$ et un unique $\theta \in]-\pi,\pi]$ tel que $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$.

Prop 13 : [formules de Moivre]
$\forall n \in \mathbb{N}$, $(\cos x + i\sin x)^n = \cos(nx) + i\sin(nx)$.

Application 14 : Calcul des noyaux de Dirichlet et de Fejer.
$$D_N(x) = \sum_{n=-N}^{N} e^{inx} = \frac{\sin\left(\frac{2N+1}{2}x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$$
$$K_N(x) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} D_n(x) = \frac{\sin^2\left(\frac{Nx}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

Def 15 : Soit $z \in \mathbb{C}^*$. On appelle argument de z tout réel t tel que $\frac{z}{|z|} = e^{it}$.

Def 16 : On appelle détermination principale de l'argument sur $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_-^*$, noté $\mathrm{Arg}\, z$ pour $z \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_-^*$, l'unique argument de z tel que $\mathrm{Arg}\, z \in]-\pi,\pi[$.

Prop 17 : Arg est continue sur $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_-^*$.

c) Exponentielle matricielle [Rouvière][Berthelin]

Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Def 18 : On définit la fonction exponentielle sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ par
$$A \mapsto e^A = \exp(A) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A^n}{n!} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}).$$
Elle est bien définie, car la série est normalement convergente.

Prop 19 : exp est C^∞ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Thm 20 : On note $[X,\cdot] : H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto XH - HX \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Soient $X, H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Alors $D\exp(X).H = e^X \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-[\cdot,X])^k H}{(k+1)!}$.

DEV 1

Prop 21 : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
$t \in \mathbb{R} \mapsto e^{tA}$ est C^∞, de dérivée $t \mapsto Ae^{tA} = e^{tA}A$.

Prop 22 : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. e^A est inversible, d'inverse e^{-A}.

Thm 23 : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. La solution du problème de Cauchy $\begin{cases} y' = Ay \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$ est $t \mapsto y(t) = e^{(t-t_0)A} y_0$.

Exemple 24 : Les solutions de $\begin{cases} x' = x + 2y \\ y' = 2x + y \end{cases}$ sur $\mathbb{R}$ sont de la forme

$$\begin{cases} x(t) = \alpha e^{3t} + \beta e^{-t} \\ y(t) = \alpha e^{3t} - \beta e^{-t} \end{cases}, \text{ avec } \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

II. LE LOGARITHME

a) Logarithmes [Dantzer]

Def 25 : On appelle logarithme népérien, noté ln, la fonction réciproque de l'exponentielle réelle, définie sur $]0,+\infty[$.

Prop 26 : Pour tout $x, y \in \mathbb{R}_+^*$, $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$.
De plus, ln est C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Thm 27 : ln est l'unique solution au problème de Cauchy $\begin{cases} y' = \frac{1}{x} \\ y(1) = 0 \end{cases}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Prop 28 : $\lim_{x \to 0^+} \ln(x) = -\infty$; $\lim_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$; et ln est concave.

Application 29 : On définit l'exponentielle en base a, pour $a \in \mathbb{R}$, par $t \mapsto a^t = e^{t\ln(a)}$

Application 30 : Pour $b \in \mathbb{R}_+ \setminus \{0,1\}$, on définit le logarithme en base a comme la réciproque de l'exponentielle en base a, définie sur $]0,+\infty[$, et notée $\log_a$.

Prop 31 : Pour tous $a, b \in \mathbb{R}_+ \setminus \{0,1\}$, $\log_b(x) = \frac{\log_a(x)}{\log_a(b)}$.

Application 32 : Définition du décibel avec le logarithme décimal.

b) Logarithme complexe [Tauvel] [Amar-Matheron]

Def 33 : . Soit $z \in \mathbb{C}^*$, on appelle logarithme de z tout complexe ζ tel que $e^\zeta = z$.
. Soit U un ouvert de $\mathbb{C}^*$. Une détermination du logarithme sur U est une application f telle que $\exp \circ f = id$.

Prop 34 : Soit U un ouvert de $\mathbb{C}^*$. Les déterminations continues du logarithme sur U sont les fonctions sur U de la forme $z \mapsto \ln|z| + i\theta(z)$, où θ est une détermination continue de l'argument sur U.

Rem 35 : Soit d_α la demi-droite d'origine 0 et d'argument α
$\exp : \{z \in \mathbb{C} \setminus \alpha < \mathrm{Im}(z) < \alpha + 2\pi\} \to \mathbb{C} \setminus d_\alpha$, $z \mapsto e^z$ est bijective,
et on obtient ainsi une détermination unique du logarithme sur cet ouvert.
↪ voir figure 1

Def 36 : On appelle détermination principale du logarithme sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-^*$, la fonction $z \mapsto \ln|z| + i\,\mathrm{Arg}(z)$, que l'on note $\mathrm{Log}\, z$.

Ex 37 : Soit $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$. $\mathrm{Log}\, j^2 = -\frac{2i\pi}{3} \neq 2\,\mathrm{Log}\, j = \frac{4i\pi}{3}$.

Rem 38 : Il n'existe pas de détermination continue du logarithme sur $\mathbb{C}^*$.

Prop 39 : Log est holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$, et $\mathrm{Log}'\, z = \frac{1}{z}$.

Prop 40 : Pour $|z| < 1$, $\mathrm{Log}\, 1 + z = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{z^n}{n}$.

III - LA FONCTION GAMMA D'EULER

a) Définition [ZQ]

Pour $x>0$, on définit la fonction gamma par $\Gamma(x)=\int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t}\,dt$.

<u>Prop 41</u> : Γ est bien définie, C^∞ sur $]0,+\infty[$, et log-convexe.

<u>Exemple 42</u> : $\Gamma(1)=1$, $\Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}$.

<u>Prop 43</u> : . $\forall x>0$, $\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$.

. $\Gamma(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} \frac{1}{x}$.

<u>Prop 44</u> : Γ se prolonge en une fonction holomorphe sur l'ouvert $\Omega_0=\{z\in\mathbb{C},\ \mathrm{Re}\, z>0\}$.

<u>Thm 45</u> : Γ se prolonge en une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}\setminus -\mathbb{N}$.

<u>Application 46</u> : [Formule d'Euler]
Pour tout $x>0$, $\Gamma(x)=\lim_{n\to+\infty} \frac{n!\,n^x}{x(x+1)\cdots(x+n)}$.

DEV 2

<u>Prop 47</u> : Γ se prolonge en une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$, dont les pôles sont les $\{-n,\ n\geq 0\}$, de résidus $\mathrm{Res}(\Gamma,-n)=\frac{(-1)^n}{n}$.

Prop 48 : [formule de Weierstraß, admise]
On note γ la constante d'Euler définie par $\gamma=\lim_{n\to+\infty}(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n)$.
Alors pour tout $z\in\mathbb{C}\setminus-\mathbb{N}$, $\frac{1}{\Gamma(z)}=z\,e^{\gamma z}\prod_{n=1}^{+\infty}(1+\frac{z}{n})e^{-\frac{z}{n}}$.

b) Application [SS] [Amar-Matheron]

<u>Thm 49</u> : [formule des compléments]
Pour $z\in\mathbb{C}$, $0<\mathrm{Re}\, z<1$, $\Gamma(z)\Gamma(1-z)=\frac{\pi}{\sin \pi z}$.

<u>Thm 50</u> : [Formule de Stirling]
Soit $x>0$. $\Gamma(x+1)\underset{x\to+\infty}{\sim} x^x e^{-x}\sqrt{2\pi x}$.

<u>Références</u> :

[Tauvel] Analyse complexe de la licence 3
[Rudin] Analyse réelle et complexe
[Rouvière] Petit guide du calcul différentiel
[Berthelin] Équations différentielles
[Dantzer] Mathématiques pour l'agrégation interne
[Amar-Matheron] Analyse complexe
[ZQ] Zuily, Queffélec, Analyse pour l'agrégation
[SS] Stein-Shakarchi, Complex Analysis.

ANNEXES

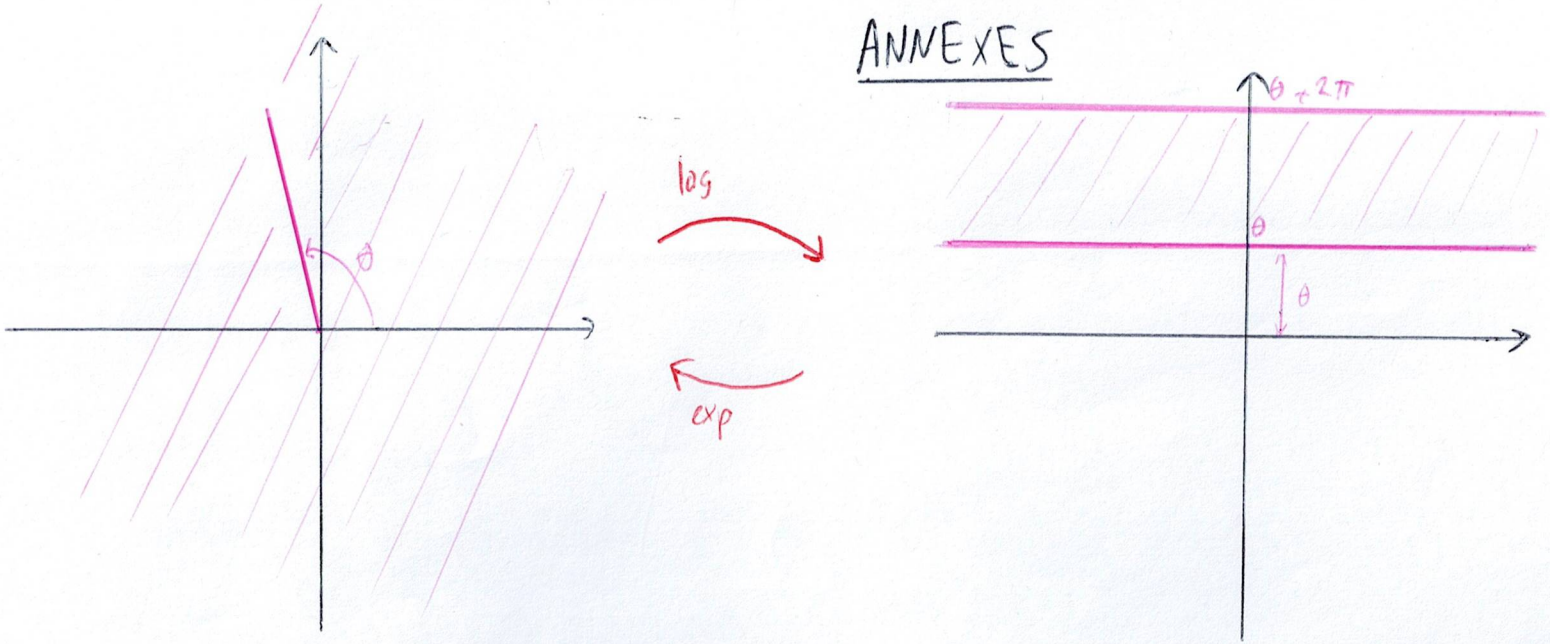

Figure 2 : Détermination de logarithmes complexes

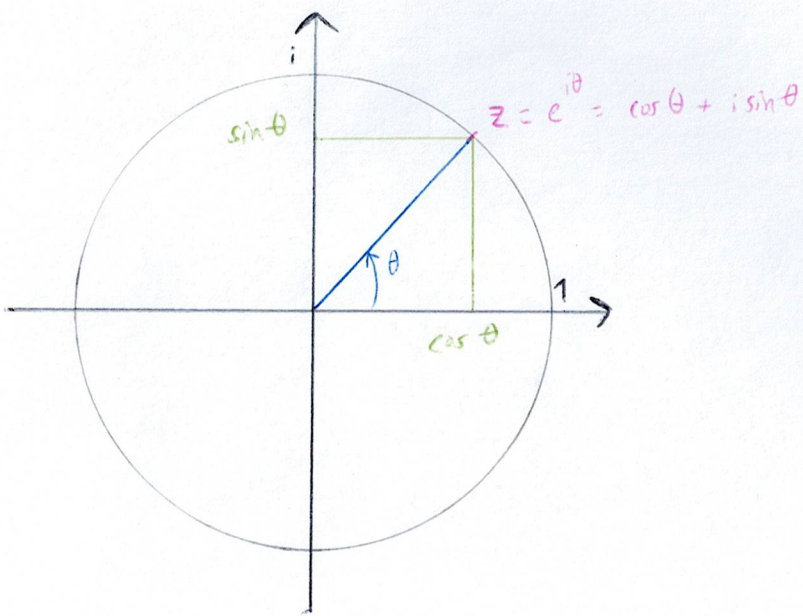

Figure 1 : Illustration de la Prop 12

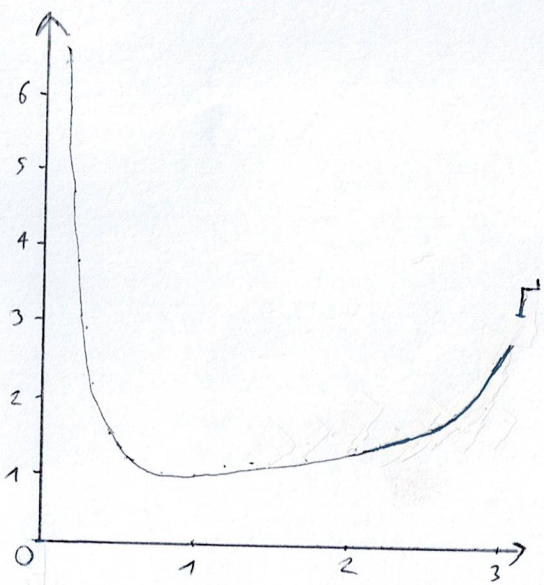

Figure 3 : Graphe de Γ sur $\mathbb{R}_+^*$ [Gourdon]