160 : Endomorphismes remarquables d'un espace vectoriel euclidien (de dimension finie)

I Conséquence du caractère euclidien de l'espace

A Adjoint d'un endomorphisme   Rom 22.2

Soit E un espace vectoriel euclidien (ie ev réel de dim finie muni d'un produit scalaire)

Lemme 1 : Pour toute forme linéaire l sur E, il existe un unique vecteur $a \in E$ tel que :
$$\forall x \in E,\ l(x) = \langle x \mid a \rangle$$

Théorème 2 : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, il existe un unique $u^* \in \mathcal{L}(E)$ tel que :
$$\forall (x,y) \in E^2,\ \langle u(x), y \rangle = \langle x, u^*(y) \rangle$$

Définition 3 : Avec les notations du théorème précédent, on dit que u^* est l'adjoint de u.

Exemple 4 : Si u est symétrique alors $u^* = u$.

B Propriétés de l'adjoint   Rom 22.2

Théorème 5 : Soient $B = (e_i)_{1 \le i \le m}$ une base de E et $G = (\langle e_i \mid e_j \rangle)_{1 \le i,j \le m}$ la matrice de Gram correspondante.
Si $u \in \mathcal{L}(E)$ a pour matrice A dans la base B, alors la matrice de u^* dans B est $G^{-1}\, {}^tA\, G$.

Corollaire 6 : Si B est une base orthonormée, la matrice de u^* dans cette base est ${}^tA$.

Corollaire 7 : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, on a $\det(u^*) = \det(u)$.

Théorème 8 : Soient u et v dans $\mathcal{L}(E)$, on a :
i) $(\lambda u + v)^* = \lambda u^* + v^*$, $(u^*)^* = u$, $(u \circ v)^* = v^* \circ u^*$
ii) Si $u \in GL(E)$, alors $u^* \in GL(E)$ et $(u^*)^{-1} = (u^{-1})^*$
iii) $\ker(u^*) = (\mathrm{Im}(u))^\perp$, $\mathrm{Im}(u^*) = (\ker(u))^\perp$, $rg(u^*) = rg(u)$.
iv) Si F est un sous espace vectoriel de E stable par u, alors $F^\perp$ est stable par u^*.

II Endomorphismes orthogonaux

A Caractérisations des isométries   Rom 22.3

Définitions : Une isométrie (ou application orthogonale) de E est une application $u : E \to E$ qui conserve le produit scalaire, c'est à dire :
$$\forall (x,y) \in E \times E,\ \langle u(x) \mid u(y) \rangle = \langle x \mid y \rangle.$$
On note $O(E)$ l'ensemble des isométries de E.

Exemple 10 : Les seules homothéties $x \mapsto \lambda x$ qui sont des isométries sont $\pm id$.

Théorème 11 : Une application $u : E \to E$ est une isométrie si et seulement si elle est linéaire et conserve la norme, c'est à dire : $\forall x \in E,\ \|u(x)\| = \|x\|$

Contre exemple 12 : L'hypothèse de linéarité est vitale. Par exemple pour $e \in E$ de norme égale à 1, l'application $u : x \mapsto \|x\| e$ conserve la norme et n'est pas linéaire ($u(-x) = u(x) \neq -u(x)$ pour $x \neq 0$).

Théorème 13 : Soient $B = (e_i)_{1 \le i \le m}$ une base orthonormée de E et u une application linéaire de E dans E. L'application u est une isométrie si et seulement si elle transforme B en une base orthonormée de E.

Théorème 14 : Soient $B = (e_i)_{1 \le i \le m}$ une base orthonormée de E et $u \in \mathcal{L}(E)$ de matrice A dans B. L'application u est une isométrie ssi ${}^tA . A = A . {}^tA = I_m$.

B Propriétés topologiques de $O(E)$ et $GL(E)$

Théorème 15 : Soit $A \in O_m(\mathbb{R})$, alors $\det(A) = \pm 1$ et $O_m(\mathbb{R})$ est un sous groupe de $GL_m(\mathbb{R})$.

Corollaire 16 : Soit $u \in O(E)$, alors $\det(u) = \pm 1$.

Définition 17 : On appelle ensemble des isométries positives
$O^+(E) = \{u \in O(E),\ \det(u) = 1\}$ et ensemble des isométries négatives
$O^-(E) = \{u \in O(E),\ \det(u) = -1\}$.

Théorème 18 : $O^+(E)$ (resp $O_m^+(\mathbb{R})$) est un sous groupe distingué de $O(E)$ (resp de $O_m(\mathbb{R})$) d'indice 2

Théorème 19. Les composantes connexes de $O(E)$ sont $O^+(E)$ et $O^-(E)$.

C Réduction des endomorphismes orthogonaux. Rom 22.4 et 22.3.

Lemme 20. Les seules valeurs propres réelles possibles d'une isométrie sont -1 et 1.

Lemme 21: Soit $u \in O(E)$. Il existe des sous espaces vectoriels $P_1, \dots, P_r$ de E de dimension égale à 1 ou 2, deux à deux orthogonaux, stables par u et tels que
$$E = \bigoplus_{i=1}^{r} P_i$$

Proposition 22: Soit $u \in O(E)$. Si F est un sous espace vectoriel de E stable par u, alors son orthogonal $F^\perp$ est aussi stable par u.

Théorème 23 (réduction des endomorphismes orthogonaux)
Soit $u \in O(E)$, $m \geq 2$. Il existe une base orthonormée B de E dans laquelle la matrice de u s'écrit :
$$D = \begin{pmatrix} I_p & & & & (0) \\ & -I_q & & & \\ & & R_1 & & \\ & & & \ddots & \\ (0) & & & & R_r \end{pmatrix} \text{ avec } R_k = \begin{pmatrix} \cos(\theta_k) & -\sin(\theta_k) \\ \sin(\theta_k) & \cos(\theta_k) \end{pmatrix}$$

avec $\theta_m \in]0, 2\pi[\setminus \{\pi\}$ et $p+q+2r = m$.

III Projections et symétries orthogonales [Facultatif]

A Projections orthogonales Rom 22.1

Théorème 24 (projection orthogonale) Soit F sev de E. Pour tout $x \in E$, $\exists ! \, y \in F$ tel que $\|x-y\| = d(x,F) = \inf_{z \in F} \|x-z\|$. Ce vecteur est également l'unique vecteur de F tel que $x - y \in F^\perp$.

Définition 25. En reprenant les notations du théorème précédent, on note $y = p_F(x)$ et on dit que l'application p_F est la projection orthogonale de E sur F.

Corollaire 26: Dans ce cas, si $(e_i)_{1 \leq i \leq m}$ est une base orthonormée de F, alors pour tout $x \in E$, $p_F(x) = \sum_{k=1}^{m} (x | e_k) e_k$ et on a :
$$\|x-y\|^2 = \|x\|^2 - \|y\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{m} \langle x | e_k \rangle^2$$

B Symétries orthogonales 22.5 Rom

On considère par la suite F un sev de E.

Définition 27: La symétrie orthogonale par rapport à F est l'application définie sur E par :
$$\forall x \in E, \quad s_F(x) = p_F(x) - p_{F^\perp}(x).$$

Remarque 28: Puisque $p_F + p_{F^\perp} = id$, on déduit que s_F est aussi définie par :
$$\forall x \in E, \; s_F(x) = 2p_F(x) - x = x - 2p_{F^\perp}(x).$$

Exemple 29: i) Si $D = \mathbb{R}a$ est une droite vectorielle, alors on a :
$$s_D(x) = 2p_D(x) - x = 2\frac{\langle x, a \rangle}{\|a\|^2} a - x$$

ii) Si $H = D^\perp$ est un hyperplan, alors on a :
$$s_H(x) = 2p_H(x) - x = x - 2\frac{\langle x, a \rangle}{\|a^2\|} a$$

Définition 30: On appelle réflexion une symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan et demi tour ou retournement une symétrie orthogonale par rapport à une droite.

Théorème 31: Pour $m = \dim(E) \geq 2$, le groupe $O(E)$ est engendré par l'ensemble des réflexions. Précisément, toute isométrie de E peut s'écrire comme le produit d'au plus m réflexions.

IV Endomorphismes auto adjoints

A Définitions et propriétés Rom 22.6

Définition 32: Un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ est dit symétrique (ou auto adjoint) si $u^* = u$, ce qui revient à dire :
$$\forall (x,y) \in E \times E, \; \langle u(x), y \rangle = \langle x, u(y) \rangle.$$
On note $S(E)$ l'ensemble des endomorphismes symétriques de E.

Exemple 33: $id \in S(E)$.

Théorème 34: Un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ est symétrique si et seulement si sa matrice dans une base orthonormée de E est symétrique.

Corollaire 35: $S(E)$ est un sev de $\mathcal{L}(E)$ de dimension $\frac{m(m+1)}{2}$

B Réduction des endomorphismes symétriques. Rom 22.7 et 22.9.2

Lemme 36: Les valeurs propres d'une matrice symétrique réelle A sont toutes réelles

<u>Lemme 37</u> : On suppose que $n \geq 2$. Si λ et μ sont deux valeurs propres distinctes de $u \in S(E)$, alors les espaces propres E_λ et E_μ sont orthogonaux.

Développement (Théorème spectral) Tout endomorphisme $u \in S(E)$ se diagonalise dans une base orthonormée.

<u>Corollaire 38</u> : Toute matrice symétrique réelle $A \in S_n(\mathbb{R})$ se diagonalise dans une base orthonormée, c'est à dire qu'il existe une matrice orthogonale $P \in O_n(\mathbb{R})$ telle que ${}^tPAP = D$ diagonale.

Contre exemple 39 : Le théorème spectral est faux pour les matrices complexes. Par exemple $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2i \end{pmatrix}$ est symétrique et non diagonalisable.

<u>Corollaire 40</u> : Soit $(u_i)_{i \in I}$ une famille d'endomorphismes symétriques de E ($\mathrm{card}\, I \geq 2$). Alors il existe une base orthonormée commune de diagonalisation dans E pour la famille $(u_i)_{i \in I}$ si et seulement si ces endomorphismes commutent deux à deux.

<u>C Décomposition polaire</u> Rom 22.8

<u>Définition 41</u> : Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite positive (resp définie positive) si elle est symétrique avec $\langle x | Ax \rangle \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ (resp $\langle x | Ax \rangle > 0$ $\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$). On note $S_n^+(\mathbb{R})$ (resp $S_n^+(\mathbb{R})$) l'ensemble des matrices symétriques positives (resp définies positives).

<u>Théorème 42</u> : Si $A \in S_n^+(\mathbb{R})$, il existe une unique matrice $B \in S_n^+(\mathbb{R})$ telle que $A = B^2$

<u>Théorème 43</u> : (Théorème de décomposition polaire)
Toute matrice $A \in GL_n(\mathbb{R})$ peut s'écrire de manière unique $A = \Omega S$ où $\Omega \in O_n(\mathbb{R})$ et $S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$.

Exemple 44 : $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

<u>Lemme 45</u> : $O_n(\mathbb{R}) = \{A \in GL_n(\mathbb{R}),\ {}^tAA = I_n\}$ est compact dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

<u>Théorème 46</u> : Toute matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ peut s'écrire $A = \Omega S$ où $\Omega \in O_n(\mathbb{R})$ et $S \in S_n^+(\mathbb{R})$.

Développement L'application $(\Omega, S) \mapsto \Omega S$ réalise un homéomorphisme de $O_n(\mathbb{R}) \times S_n^{++}(\mathbb{R})$ sur $GL_n(\mathbb{R})$.

Références

Rombaldi Mathématiques pour l'agrégation Rom