149 : Valeurs propres, vecteurs propres. Calculs exacts ou approchés d'éléments propres. Applications.

Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif, E un $\mathbb{K}$-ev, $u \in End(E)$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

I Valeurs propres et vecteurs propres

A Notions d'éléments propres 20.1 Rom

Définition 1 : On dit que $\lambda \in \mathbb{K}$ est valeur propre de u si $\ker(u-\lambda id)$ n'est pas réduit à $\{0\}$ i.e s'il existe $x \in E^*$ tel que $u(x) = \lambda x$. On dit alors que x est un vecteur propre de u associé à la valeur propre λ. On appelle sous espace propre associé à λ $E_\lambda = \ker(u - \lambda id)$. On note $Sp(u)$ l'ensemble des valeurs propres de u.

Proposition 2 : Si $\dim E < +\infty$ alors $\ker(u-\lambda id) \neq \{0\}$ si et seulement si $u - \lambda id$ n'est pas inversible.

Remarque 3 : En identifiant $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ à l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ qu'elle définit dans la base canonique de $\mathbb{K}^n$, on peut donner la définition suivante :

Définition 4 : On dit que $\lambda \in \mathbb{K}$ est valeur propre de $A \in M_n(\mathbb{K})$ s'il existe $x \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}$ tel que $Ax = \lambda x$. On dit alors que x est un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ et que le sous espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$, $E_\lambda = \{x \in \mathbb{K}^n, Ax = \lambda x\}$ est le sous espace propre associé à λ.

Théorème 5 : Si $A \in S_n(\mathbb{R})$, alors $Sp(A) \subset \mathbb{R}$.

B Polynôme caractéristique et sous espace propre Rom 20.1

Définition 6 : Le polynôme caractéristique de u est $\chi_u(X) = \det(X id - u)$. De même on définit le polynôme caractéristique de $A \in M_n(\mathbb{C})$ $\chi_A(X) = \det(XI - A)$.

Proposition 7 : Si $\dim(E) = n$, alors $Sp(u) = \{\lambda \in \mathbb{K}, \det(u - \lambda id) = 0\}$

Remarque 8 : pour $\mathbb{K}$ non algébriquement clos (par exemple $\mathbb{K} = \mathbb{R}$) ce spectre peut être vide.

Lemme 9 : On suppose que $\dim E < +\infty$. Si F est un sev de E u-stable alors $\chi_{u_{|F}} \mid \chi_u$.

Théorème 10 : On suppose E de dimension finie. Si $\lambda \in \mathbb{K}$ est une valeur propre de u de multiplicité α en tant que racine de χ_u alors $1 \leq \dim(\ker(u - \lambda id)) \leq \alpha$.

Exemple 11 : i) Si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$, $\chi_A(X) = X^2 - tr(A)X + \det(A)$.
ii) Si $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ est une matrice de rotation dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ alors on a $\chi_{R_\theta}(X) = (X - \cos\theta)^2 + \sin^2\theta$.
iii) Pour $u : \mathbb{K}[X] \to \mathbb{K}[X]$ $P \mapsto XP$, $\ker(u - \lambda id) = \{0\}$ donc $Sp(u) = \emptyset$

Théorème 12 : Si $sp(u) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_p\}$ alors les sous espaces propres $E_k = \ker(u - \lambda_k id)$ pour $k \in [\![1, p]\!]$ sont en somme directe.

C Valeurs propres des endomorphismes nilpotents Rom 20.2

On suppose ici que E est de dimension finie.

Lemme 13 : Si u est nilpotent, alors 0 est valeur propre de u et $tr(u) = 0$.

Théorème 14 : Pour $\mathbb{K}$ algébriquement clos, u est nilpotent si et seulement si 0 est la seule valeur propre de u.

Contre exemple 15 : L'hypothèse sur $\mathbb{K}$ est vitale ! Pour $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$, $0 \in Sp(A)$ mais A n'est pas nilpotente.

Lemme 16 : Soit $\omega_1, \dots, \omega_n \in \mathbb{K}^n$
Alors $\begin{vmatrix} 1 & \omega_1 & \cdots & \omega_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \omega_n & \cdots & \omega_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{i<j} (\omega_j - \omega_i)$ (déterminant de Vandermonde)

Théorème 17 : On suppose le corps $\mathbb{K}$ de caractéristique nulle. Un endomorphisme u est nilpotent ssi $tr(u^k) = 0$ $\forall k \in [\![1, n]\!]$

II Normes matricielles et conditionnement

A Normes matricielles et rayon spectral Cia 1.4

Soit par la suite $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Définition 18 : Soit $\|\cdot\|$ norme sur $M_n(\mathbb{K})$. On dit que $\|\cdot\|$ est une norme matricielle si : $\forall A, B \in M_n(\mathbb{K})^2$, $\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$

Exemple 19 : $\|A\|_F = \left(\sum_{i=1}\sum_{j=1}|a_{ij}|^2\right)^{\frac{1}{2}}$ est une norme matricielle.

Définition 20 : Étant donné une norme vectorielle $\|\cdot\|$ sur $\mathbb{C}^n$, l'application $\|\cdot\| : M_n(\mathbb{C}) \to \mathbb{R}$ définie par $\|A\| = \sup_{v\in\mathbb{C}^n, v\neq 0}\frac{\|Av\|}{\|v\|} = \sup_{v\in\mathbb{C}^n, \|v\|=1}\|Av\|$ est une norme matricielle appelée norme matricielle subordonnée.

Proposition 21 : Soit $\|\cdot\|$ une norme matricielle subordonnée sur $M_n(\mathbb{K})$, $A\in M_n(\mathbb{K})$:
Alors 1) $\|Av\|\le\|A\|\cdot\|v\|$ $\forall v\in\mathbb{C}^n$
2) $\|A\| = \inf\{\alpha\in\mathbb{R},\ \|Av\|\le\alpha\|v\|\ \forall v\in\mathbb{C}\}$
3) $\exists u\neq 0\in\mathbb{K}^n$ tel que $\|Au\| = \|A\|\|u\|$.
4) $\|I\|=1$.

Contre-exemple 22 : Une norme matricielle n'est pas forcément subordonnée. Par exemple $\|I_n\|_F = \sqrt{n}\neq 1$.

Définition 23 : On appelle rayon spectral de $A\in M_n(\mathbb{K})$, $\rho(A) = \max(S_p(A))$.

Théorème 24 : Soit $A\in M_n(\mathbb{K})$, alors.
1) $\|A\|_1 := \sup\frac{\|Av\|_1}{\|v\|_1} = \max_j\sum_i|a_{ij}|$
2) $\|A\|_2 := \sup\frac{\|Av\|_2}{\|v\|_2} = \sqrt{\rho(A^*A)} = \sqrt{\rho(AA^*)} = \|A^*\|_2$.
3) $\|A\|_\infty := \sup\frac{\|Av\|_\infty}{\|v\|_\infty} = \max_i\sum_j|a_{ij}|$

Théorème 25 : 1) Soit $A\in M_n(\mathbb{K})$ et $\|\cdot\|$ une norme matricielle, alors $\rho(A)\le\|A\|$.
2) Soit $A\in M_n(\mathbb{K})$, $\varepsilon>0$. Il existe au moins une norme matricielle subordonnée telle que $\|A\|\le\rho(A)+\varepsilon$.

Définition 26 : L'isobarycentre de $z_1,\dots,z_n\in\mathbb{C}^n$ est le complexe $\frac{z_1+\dots+z_n}{n}\in\mathbb{C}$

Développement (déterminant circulant) Soit $a_0,\dots,a_{n-1}\in\mathbb{C}^n$, $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$

Alors : $\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & \cdots & a_{n-2} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_0 \end{vmatrix} = \prod_{j=0}^{n-1}\sum_{i=0}^{n-1} a_i\,\omega^{ij}$.

Soit P un polygône de sommets $z_1,\dots,z_n\in\mathbb{C}^n$ et $P=P_0$ et $\forall k\in\mathbb{N}$, P_{k+1} le polygône dont les sommets sont les milieux des arrêtes de P_k. Alors (P_k) converge vers l'isobarycentre de P.

B Conditionnement de matrices Cia 2.2 2.3

Définition 27 : Soit $\|\cdot\|$ une norme matricielle subordonnée et $A\in GL_n(\mathbb{K})$. Le nombre $\mathrm{cond}(A) := \|A\|\cdot\|A^{-1}\|$ s'appelle le conditionnement de A par rapport à $\|\cdot\|$.

Remarque 28 : Le nombre cond(A) mesure la sensibilité de la solution u du système linéaire $Au=b$ vis-à-vis des variations sur les données A et b.

Théorème 29 (Bauer Fike) Soit A une matrice diagonalisable, $P\in GL_n(\mathbb{K})$, $P^{-1}AP = \mathrm{diag}(\lambda_i)$ et $\|\cdot\|$ une norme matricielle telle que $\|\mathrm{diag}(d_i)\| = \max|d_i|$ pour toute matrice diagonale. Alors pour toute matrice δA, $\mathrm{sp}(A+\delta A)\subset\bigcup_{i=1}^n D_i$ où $D_i = \{z\in\mathbb{C},\ |z-\lambda_i|\le\mathrm{cond}(P)\|\delta A\|\}$.

Remarque 30 : Les normes matricielles $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ vérifient l'hypothèse de l'énoncé du théorème.

Définition 31 : Si A est diagonale on appelle conditionnement de la matrice A le nombre $\Gamma(A) = \inf\{\mathrm{cond}(P),\ P^{-1}AP = \mathrm{diag}(\lambda_i)\}$ Réécrire Thm 29 grâce à Déf 31

III Recherche de valeurs propres et de vecteurs propres

A Pour des matrices complexes Rom 20.3 + exo

Théorème 32 (Gerschgörin-Hadamard) Soient $A\in M_n(\mathbb{C})$ et $\lambda\in\mathbb{C}$ une valeur propre de A. Alors il existe $i\in\{1,\dots,n\}$ tel que $|\lambda-a_{ii}|\le\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|$ où $j\neq i$.

Corollaire 33 : $S_p(A)\subseteq\bigcup_{i=1}^{n}\overline{B(a_{ii}, \sum_{j\neq i}|a_{ij}|)}$

Exemple 34 : Pour $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & & \\ -1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & & -1 & 1\end{pmatrix}$ le théorème 32 permet de trouver $S_p({}^tAA)$.

Définition 35 : Une matrice $A\in M_n(\mathbb{C})$ est dite à diagonale strictement dominante si : $\forall i\in[\![1,n]\!]$, $|a_{ii}| > \sum_{j=1, j\neq i}^{n}|a_{ij}|$.

Corollaire 36 : Une matrice $A\in M_n(\mathbb{C})$ à diagonale strictement dominante est inversible.

Exemple 37 : $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \\ -1 & -1 & 4\end{pmatrix}$ est inversible

B Décomposition LU et Cholesky. Cia 4.3 et 4.4.

Développement (décomposition LU) Soit $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{K})$ telle que $\forall k \in [\![1,n]\!]$ $\Delta_k = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{pmatrix} \in GL_k(\mathbb{K})$. Alors il existe une matrice triangulaire inférieure $L = (l_{ij})$ avec $l_{ii} = 1$ $\forall i$ et une matrice supérieure U telles que $A = LU$. Une telle décomposition est unique.

Remarque 38 : Un cas important où les conditions d'application du théorème précédent se trouvent vérifiées est celui où $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$.

Exemple 39 : $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 2 & 10 & 17 \\ 3 & 20 & 41 \end{pmatrix}$.

Application 40 : Si $A \in GL_n(\mathbb{K})$ alors résoudre $Av = b$ revient à résoudre $Lw = b$ puis $Uv = w$ où $A = LU$.

Application 41 : La méthode de détermination des valeurs propres est la suivante :
1) on décompose $A = LU$
2) on pose $A_1 = UL$
3) on décompose $A_1 = L_1 U_1$
4) on pose $A_2 = U_1 L_1$
5) etc

Sous certaines conditions non triviales (lesquelles ?), $(L_k) \to I$ et $U_k \to$ une matrice triangulaire supérieure dont les coefficients diagonaux sont les valeurs propres de A.

Développement (décomposition de Cholesky) Soit $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$, il existe au moins une matrice réelle triangulaire inférieure B telle que $A = B\,{}^tB$. De plus on peut imposer que les éléments diagonaux de B soient tous > 0, et la factorisation $A = B\,{}^tB$ est alors unique.

Application 42. Si $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$, alors résoudre $Au = b$ revient à résoudre $Bw = b$ puis ${}^tB\,u = w$ où $A = B\,{}^tB$.

Remarque 43. Le nombre d'opérations est en $O(n^3)$.

Application 44 On peut utiliser la décomposition de Cholesky pour déterminer les valeurs propres d'une matrice (comment ?)

Exemple 45 : $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

C Méthode de la puissance All 9.1 [FACULTATIF]

Théorème 46 : Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ diagonalisable de valeurs propres réelles $|\lambda_1| \leq \cdots \leq |\lambda_{n-1}| \leq \lambda_n$ associées à $e_1, \ldots, e_n \in \mathbb{K}^n$ vecteurs propres. Soit $x_0 \in \mathbb{K}^n$ et $(y_k = A x_{k-1})_{k \in \mathbb{N}}$, $(x_k = \frac{y_k}{\|y_k\|})_{k \in \mathbb{N}}$. Alors $\lim \|y_k\| = \lambda_n$ et $\lim x_k = \pm e_n =: x_\infty$

Remarque 47 : En adaptant les idées précédentes, on peut calculer les plus petites valeurs propres de A en remplaçant A par A^{-1}.

Proposition 48 : La vitesse de convergence de cette méthode est donnée par $|\|y_k\| - \lambda_n| \leq C\left(\frac{|\lambda_{n-1}|}{|\lambda_n|}\right)^k$ et $\|x_k - x_\infty\| \leq C\left(\frac{|\lambda_{n-1}|}{|\lambda_n|}\right)^k$

Remarque 49 : On a une meilleure vitesse de convergence (combien ?) si on suppose A symétrique réelle

Scanné avec CamScanner

Références :

Rombaldi Mathématiques pour l'agrégation Rom

Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation Ciarlet Cia

Algèbre linéaire numérique Allaire All

Dans la partie III on aurait aussi pu parler de la méthode QR et de la méthode de Jacobi.