

1 Indispensables

- Décomposition de DUNFORD
- Des décompositions de matrices utiles dans différentes branches des mathématiques : réduction d'endomorphismes, topologie des matrices, résolutions d'équations linéaires...
- Des algorithmes de constructions effectives ou approchées (notamment via la méthode de Newton)
- Des applications significatives : exemples simples, réduction, résolution de systèmes, systèmes différentiels...
- Bien préciser où il y a unicité et où il n'y a pas. Avec des contre-exemples!

2 Conseils et suggestions

- **Décomposition de DUNFORD** : théorème, aspect polynômial, algorithme effectif [NH2G2 I], calcul de puissances de matrices, liens avec l'exponentielle de matrices
- **Décomposition de JORDAN** : cas des matrices nilpotentes, liens avec les tableaux de Young. Cas général.
- **Décomposition de FROBENIUS** : théorème, applications...
- **Décomposition de FITTING** : théorème, dénombrement du cône nilpotent. Peut être vu comme corollaire de Dunford, mais pas dans \mathbb{F}_q .
- Attention, IWASAWA du Gourdon correspond à CHOLESKY et QR!
- **Décomposition polaire** : cas réel et complexe, homéomorphisme [NH2G2 I], conséquences topologiques, algorithme effectif [NH2G2 I]. C^∞ -difféomorphisme [Gonord, Tosel]
- * **Décomposition en valeurs singulières** : plein de jolis résultats compliqués
- **Décomposition LU** : résolution de systèmes, pivot de Gauss, complexité, calcul de déterminant et d'inverse.
- **Décomposition de CHOLESKY** : résolution de systèmes, meilleure complexité, lien avec les vecteurs gaussiens et les matrices de covariance, méthode des moindres carrés
- **Décomposition QR** : résolution de système, calcul de déterminant, méthode QR pour la recherche d'éléments propres. Méthode issue du procédé d'orthonormalisation de GRAM-SCHIMDT ou des matrices de HOUSEHÖLDER
- * **Décomposition de SCHUR** : issue de QR.
- **Décomposition de Hermite** : résolution de systèmes à valeurs entières [Cohen]
- Pivot de Gauss pour le PGCD [Herr]
- Les liens entre les décompositions : polaire, IWASAWA, CARTAN sont liés; LU, QR, CHOLESKY aussi. QR donne SCHUR. DUNFORD donne FITTING.
- Pour les formélistes : de la complexité d'algorithmes!
- Éviter d'aller dans les décompositions de matrices pas carrées...
- Attention aux cours dans lesquels on se place pour les décompositions. Une question naturelle du jury si vous vous limitez trop sera : « Cette décomposition est-elle valable sur \mathbb{R} ? Dans un corps fini? »
- D'autres possibilités de fil rouge :
 - aspects algorithmiques tout au long de la leçon;
 - propriétés topologiques des décompositions étudiées;
 - existence vs unicité des décompositions.

3 Des ouvrages

Gourdon *Algèbre*

Rombaldi *Analyse numérique matricielle*

H2G2 Philippe CALDÉRO, Jérôme GERMONI, *Histoires hédonistes de groupes et de géométries*

NH2G2 Philippe CALDÉRO, Jérôme GERMONI, *Nouvelles histoires hédonistes de groupes et de géométries*

Algèbre Philippe CALDÉRO, Marie FALCONNIER, *Carnet de voyage en Algèbre*

Allaire *Algèbre linéaire numérique*

Ciarlet *Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation*

4 Rapports du jury

2022 "Dans cette leçon, le candidat choisit quelques exemples de décompositions de matrices qu'il présente avec quelques applications significatives. Citons les plus classiques : décomposition LU, décomposition de DUNFORD, décomposition de FROBENIUS, décomposition de JORDAN, décomposition QR, décomposition polaire, décomposition de CHOLESKY... Il ne s'agit pas d'établir un catalogue complet, mais plutôt de faire un choix avec des méthodes et des domaines d'applications variées. Les aspects de constructions effectives ou approchées algorithmiques doivent être abordés. Les relations entre les différentes décompositions proposées, s'il y en a, doivent être connues."

5 Développements possibles

- Décomposition de DUNFORD
- Décomposition de DUNFORD algorithmique
- Décomposition de JORDAN des nilpotents
- Décomposition de FROBENIUS
- Décomposition de FITTING et cardinal du cône nilpotent
- Décomposition polaire (homéomorphisme)
- * Décomposition polaire (C^∞ -difféomorphisme)
- Décompositions LU et CHOLESKY
- * Méthode QR (*bon recasage avec les leçons 149, 162*)