

## 261 : Loi d'une variable aléatoire : caractérisations, exemples et applications.

**Cadre :**  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  un espace probabilisé.  $\lambda$  la mesure de LEBESGUE.

### I) Loi d'une variable aléatoire, propriétés

- A) Définition, caractérisation des variables aléatoires discrètes  
 Définitions de variable aléatoire, de loi. Exemple. Définition d'une loi discrète. Théorème de caractérisation des lois discrètes, exemples de lois usuelles. Définition d'une loi à densité, exemples de lois usuelles.
- B) Caractérisation par l'espérance des classes de fonctions  
 Définition de l'espérance. Théorème de transfert. Exemples classiques. Contre-exemple de la loi de CAUCHY. Propriétés de l'espérance. Inégalités de MARKOV et de CHEBYCHEV. Caractérisation par les fonctions tests, exemple.

### II) Caractérisation par les fonctions

- A) Fonction de répartition  
 Définition, exemple. Théorème de caractérisation. Propriété de la fonction de répartition. Loi d'une variable en fonction de  $F'$ .
- B) Fonction génératrice  
 Définition, exemples sur des lois discrètes. Caractérisation. Application. Caractérisation de l'existence de l'espérance + valeur.
- C) Fonction caractéristique  
 Définition, Caractérisation, propriété de la fonction caractéristique. Calcul des moments.

### III) Indépendance

Définition de variables aléatoires indépendantes, exemples. Caractérisation de variables aléatoires indépendantes. Application à l'espérance, fonctions caractéristique et génératrice. **DEV 1 :** INÉGALITÉ DE Hoeffding.

### IV) Convergence en loi

Définition, stabilité par fonction continue, par somme. Cas des variables aléatoires discrètes. Théorème de LEVY. Théorème central limite, application de MOIVRE-LAPLACE. Loi faible des grands nombres. Définition de la fonction  $\beta$ , propriétés. **DEV 2 :** MARCHE ALÉATOIRE SUR  $[0, 1]$ .

### Références :

- GARET-KURTZMANN