253 : Utilisation de la notion de convexité en analyse.

Cadre : E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

I) Généralités

A) Ensembles et fonctions convexes

Partie convexe, application convexe, exemples. Caractérisation d'une fonction convexe. Conséquences.

B) Inégalités classiques

Inégalités sur l'exponentielle, le logarithme népérien et le sinus. Inégalités arithmético-gométrique, de YOUNG.

II) Applications dans certains espaces

A) Espace L^p

Espace $\mathcal{L}^p$, inégalité de HÖLDER, application à la fonction GAMMA. Inégalité de MINKOWSKI. Espace L^p. Cas des mesures finies.

B) Espace probabilisé

Espérance d'une variable aléatoire, inégalité de JENSEN, exemples. Inégalité de HOEFFDING, applications.

C) Espace de HILBERT

DEV 1 : PROJECTION + RIESZ-FISHER. Application à la densité d'un s.e.v. d'un HILBERT. **DEV** 2 : THÉORÈME DE STAMPACCHIA. Application au problème de DIRICHLET.

III) Résultats de séparation

Soit E un e.v.n..

Hyperplan affine, caractère fermé d'un hyperplan. Séparation de parties au sens large / strict. Jauge d'un convexe. Théorème de HAHN-BANACH (géométrique).

IV) Application aux extrema et aux point fixes

Caractérisation d'une application convexe différentiable à valeurs réelles. Application. Unicité d'un minimum pour une application strictement convexe. Inégalité d'EULER. Méthode de NEWTON. Méthode de gradient à pas optimal.

ANNEXES : Projections sur un convexe fermé et sur un sous-espace fermé, inégalité d'EULER, méthode de NEWTON.

Références :

- GOURDON
- GARET-KURTZMANN
- BECK-MALICK-PEYRÉ
- BREZIS