

## 245 : Fonction d'une variable complexe.

### Exemples et applications.

Cadre :  $\mathcal{U} \subset \mathbb{C}$  un ouvert.

#### I) Généralités

##### A) Analyticité

Définitions d'une fonction développable en série entière et d'une fonction analytique, exemples. La  $\mathbb{C}$ -algèbre  $\mathcal{A}(\mathcal{U})$ . Principe du prolongement analytique, des zéros isolés, exemples.

##### B) Holomorphie

Définition d'une fonction holomorphe, conditions de CAUCHY-RIEMANN, exemples. Dérivée nulle sur un ouvert connexe. Caractérisation des fonctions constantes sur un ouvert connexe.

#### II) Théorie de Cauchy

##### A) Définitions

Indice, propriétés, calcul pratique de l'indice. Existence de primitive. Lemme de GOURSAT

##### B) La formule de CAUCHY

Formule de CAUCHY, applications. Analyticité des fonctions holomorphes.

#### III) Propriétés des fonctions holomorphes

##### A) Résultats fondamentaux

Inégalités de CAUCHY, applications (LIOUVILLE, D'ALEMBERT-GAUSS). Principe du maximum local puis global, exemple.

##### B) Stabilité par passage à la limite

Convergence uniforme sur tout compact, convergence uniforme sur tout compact d'une suite et d'une série de fonctions holomorphes.

##### C) Stabilité par intégration

Théorème d'holomorphie sous le signe intégral. Application à la fonction  $\Gamma$ .

#### IV) Théorème des résidus et applications

##### A) Résidu

Singularités, caractérisation. Résidu d'une fonction en un point. Théorème des RÉSIDUS. Exemple.

##### B) Application à la transformée de FOURIER

L'opérateur  $\mathcal{F}$ , noyau de GAUSS, approximation de l'unité.  
**DEV 1** : INJECTIVITÉ DE LA TRANSFORMÉE DE FOURIER  
**DEV 2** : THÉORÈME DE PALEY-WIENER

ANNEXES : Exemples d'indices, noyau de GAUSS, transformée de FOURIER classique

Références :

- **TAUVEL**
- **BECK-MALICK-PEYRÉ**
- **AMRANI**