(143) Résultant. Applications.

(Ap.-J, Saux-Pic, Szpirglas)

I/ Définition et propriété fondamentale du résultant.

· Définition : A anneau commutatif, intègre, unitaire
Matrice de Sylvester, résultant (m,n)
résultant intrinsèque

· Propriété fondamentale (A RETENIR)
· $Res_{m,n}(P,Q) \in \mathrm{Im}\,\phi$ où $\phi : (U,V) \mapsto PU+QV$
· $Res_{m,n}(P,Q)$ polynôme en les $a_0,\dots,a_m, b_0,\dots,b_n$ à coeff entiers

(SP) · Propriété de spécialisation : $f : A \to B$ m. d'ann.
$f(Res_{m,n}(P,Q)) = Res_{m,n}(\sum f(a_k)X^k, \sum f(b_k)X^k)$

· Théorème :
· A factoriel : $Res_{m,n}(P,Q)=0 \Leftrightarrow$ pgcd (P,Q) non cst ou (deg $P<m$ et deg $Q<n$)
· A corps : $Res_{m,n}(P,Q)=0 \Leftrightarrow P, Q$ ont une racine commune dans une clôture alg de A ou (deg $P<m$ et deg $Q<n$).

↳ appl (Gourdon) : $\overset{\circ}{D} = \Gamma$, D matrices diag.

II/ Calcul du résultant

(SP) · Propriété d'échange, d'homogénéité, ab du degré → (Ap-J)
· $Res(X-b, P)$
· Formule de Poisson (Apéry-J) + appl
↳ corollaire : multiplicativité (formules dans ApJ)
formule avec racines (Szp)
· Division euclidienne + algo + exemple (SP)

III/ Applications algébriques

· Discriminant (Szp)
↳ racines multiples
discriminant de aX^2+bX+c
X^3+pX+q
X^3+pX^2+q. + (évt) appl : Cayley-Ham.

· Nombres algébriques (Szp)
avec ex

· (Evt) Tsf° des éq algébriques + Kronecker

· (SZ) Existence de U, V pol tels que $Res(A,B) = UA+VB$ ($Res \in \mathrm{Im}\,\phi$) → cas de $\mathbb{C}[X,Y] = \mathbb{C}[Y][X]$
appl : Idéaux premiers et maximaux de $\mathbb{C}[X,Y]$.

IV/ Applications géométriques

· Calcul d'intersections de courbes algéb planes (SP)
Elimination (SP) d'une variable (théorème) → thm de Bézout

· Paramétrisation rationnelle, par implicite (A RETENIR)
Γ paramétrée par $(x(t), y(t)) = \left(\frac{P(t)}{Q(t)}, \frac{R(t)}{S(t)}\right)$
alors $Res_T(P(T)-XQ(T), R(T)-YS(T)) = 0$.
exemple : $\Gamma = \{(t^2, t^2+t),\ t \in \mathbb{R}\}$
$\to (Y-X-t)^2 = 0$.